FÍSICA

1.- Un cilindro con un pistón móvil de masa despreciable encierra un gas ideal a T=293 K. Cierta cantidad de agua situada sobre el pistón llena el cilindro hasta una altura H=2 m. Justo por debajo del nivel del agua hay un orificio que permanece inicialmente cerrado. En esta situación de equilibrio, el pistón tiene una altura de 1 m.
a) Suponiendo que la presión atmosférica es de P_0=101 kPa y que la aceleración de la gravedad es g=10 m/s^2, calcular la presión inicial del gas y su densidad (en forma de concentración molar mol/m³)
b) Si se abre el orificio, el agua comienza a salir lentamente y la presión a la que se ve sometido el gas disminuye de forma suficientemente lenta para considerarse cuasiestática. Consecuentemente el gas se expande, hace que salga más agua por el orificio, disminuya más la presión y el gas siga expandiéndose. Representar un diagrama P-V los sucesivos estados del gas.
c) ¿Podemos asegurar que, al menos inicialmente, la temperatura aumentará durante la expansión?
d) ¿Cuál será su altura máxima?

Resolución revisada incluyendo aportaciones de sleepylavoisier
>El enunciado no es totalmente claro, se puede asumir que la altura de 2 m de agua es medida desde el comienzo del cilindro o desde el comienzo del pistón. Asumimos que es desde el comienzo del pistón.
>Enunciado da datos con 1, 2, y 3 cifras significativas: damos resultados con 1 cifra significativa.

a) Como se indica que la masa del pistón es despreciable, la presión ejercida sobre el gas es la asociada a la columna de agua.
No es dato pero asumimos para el agua densidad 10^3 kg/m^3, por lo que

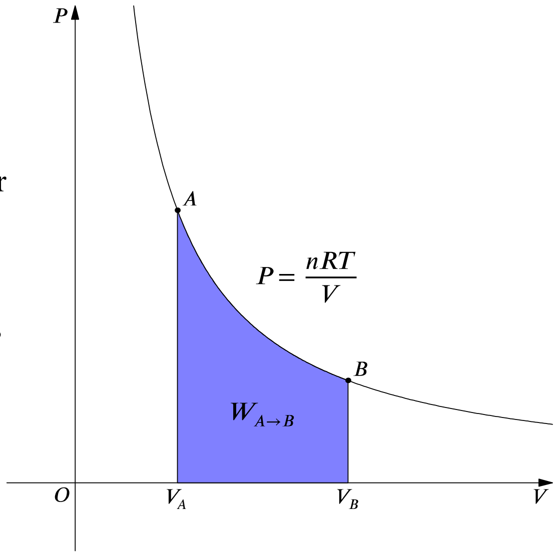
$$\Delta P=\rho g \Delta h \Rightarrow P=P_0+\rho g \Delta h=101\cdot 10^3+10^3\cdot 10\cdot 2=1{,}21\cdot 10^5\,Pa$$

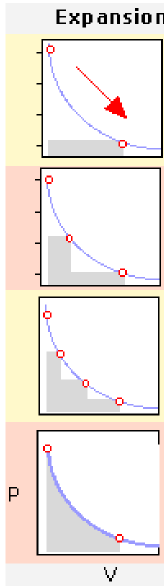
Se indica que es un gas ideal utilizamos la ecuación de los gases ideales.
No es dato pero asumimos R=8,31 J·mol^{-1}·K^{-1}

$$PV=nRT\Rightarrow \frac{n}{V}=\frac{P}{RT}=\frac{1{,}21\cdot 10^5}{8{,}31\cdot 293}=49{,}7\approx 50\frac{mol}{m^3}$$

b) Planteamos que por el orificio sale un dm de agua, lo que supondrá cierta algura de agua, relacionada con la densidad del agua y con la sección del cilindro, que desconocemos. Si planteamos que eso supone un dh, lo que sí sabemos es que el pistón subirá esa altura, y el volumen ocupado por gas también aumentará en ese dh al tener la misma sección, por lo que variará su concentración molar, expandiéndose como indica el enunciado.
En el recipiente con el gas ni el volumen ni la presión son constantes (varían de forma cuasiestática, P disminuye y V aumenta).
El gas realiza trabajo de expansión y solamente lo puede obtener de su energía interna o de un aporte de calor externo.
-Plantear un proceso isotérmico (que encaja en que P disminuye y V aumenta) implica identificar un aporte de calor, que enunciado no indica.
-Plantear un proceso adiabático implicaría asumir paredes adiabáticas, que enunciado no indica.
Pero está preguntando por el tipo de proceso y quizá por eso se omiten detalles, hay que pensar qué detalle no indicado explícitamente se asume para quedarse con una de las dos opciones.
-Ser un proceso adiabático es excepcional, y mientras no se diga parece razonable que sí hay intercambio de calor con el exterior, o sin estar aislado, que el proceso sea suficientemente rápido como para que al sistema no le dé tiempo a intercambiar calor con el entorno (por ejemplo en una tobera o en un difusor). Indicar explícitamente lento parece descartar esta opción. Otro motivo para

descartar adiabático es que no tenemos datos para asumir un coeficiente adiabático concreto (no se indica monoatómico ni diatómico).
-Ser un proceso isotérmico cuadra con un proceso lento, el sistema tiene tiempo para volver a alcanzar el equilibrio térmico con los alrededores, tomando calor del exterior. Precisamente la temperatura interior son 293 K = 20 ºC, y **es razonable asumir que aunque no lo diga el enunciado esa es también la temperatura exterior y es constante**, y que el exterior está realizando un aporte de calor a medida que se produce la expansión, sin que ello modifique la temperatura exterior.
Así que el diagrama P-V sería el de un proceso isotérmico, pero se podría plantear como escalones asociados a los dP y dV por separado teniendo V y P constante. El orden de los escalones tomando como guión el enunciado será
1. "la presión a la que se ve sometido el gas disminuye" La presión disminuye un dP a V constante. Tramo vertical de escalón infinitesimal en diagrama P-V. La temperatura disminuye.
2. " Consecuentemente el gas se expande" El volumen aumenta un dV a P constante. Tramo horizontal de escalón infinitesimal en diagrama P-V. La temperatura aumenta.





Wikimedia, cc0, Expansión ucdavis.edu, cc-by-nc-sa

Pero como son escalones infinitesimales con una escala adecuada la representación es simplemente una isoterma. Como se trata de una expansión, en el diagrama sería ir de punto A a punto B.
c) En b se ha asumido que es un proceso isotermo, inicialmente la temperatura al disminuir dP disminuye, aunque luego regresa a 293 K al recibir aporte de calor del exterior que está a 293 K.
d) La altura máxima está asociada a un nuevo equilibrio, la presión ejercida por la cantidad de agua que quede se igualará a la presión ejercida por el gas con su nuevo volumen.
Si llamamos x a la altura del pistón, de modo que x_0=1 m, la altura de la columna de agua es (3-x), y el volumen de gas será V=S·x, y sabemos el valor de $\frac{n}{V_0}=\frac{n}{S\cdot x_0}=49{,}7\Rightarrow\frac{n}{S}=49{,}7\frac{mol}{m^2}$

$$P=P_0+\rho g\Delta h=101\cdot10^3+10^3\cdot10\cdot(3-x)$$

En la nueva situación

$$PV=nRT\Rightarrow P=\frac{nRT}{V}=\frac{n}{S}\frac{RT}{x}$$

Sustituyendo

$$101\cdot10^3+10^3\cdot10\cdot(3-x)=49{,}7\cdot\frac{8{,}31\cdot293}{x}$$

$$131000\,x-10000\,x^2=121000$$

$$10\,x^2-131\,x+121=0$$

$$x=\frac{131\pm\sqrt{131^2-4\cdot10\cdot121}}{2\cdot10}=\frac{131\pm111}{20}=\begin{matrix}12{,}1\,m\\1\,m\end{matrix}$$

La solución x=1 m debía salir ya que era una situación de equilibrio conocido.
La solución x=12,1 m supera la altura total del cilindro. Cualitativamente se puede pensar que la presión del gas es elevada, y subirá el pistón completamente, y una vez superados los 2 m punto las ecuaciones no son válidas. La respuesta podría ser "la altura máxima son 2 m, retirará todo el agua

y el pistón abandonará el cilindro".
Validamos:
-Numéricamente, si x=12,1 m

$$P=P_0+\rho g \Delta h=101\cdot10^3+10^3\cdot10\cdot(3-12,1)=10^4 Pa$$

$$PV=nRT\Rightarrow P=\frac{nRT}{V}=\frac{n}{S}\frac{RT}{x}=49,7\cdot\frac{8,31\cdot293}{12,1}\approx10^4 Pa$$

-Cualitativamente: pensamos en un proceso isotermo en el que se retire todo el agua y la única presión sea la atmosférica.

$$P_1V_1=P_2V_2\Rightarrow1,21\cdot10^5\cdot\cancel{S}\cdot1=1,01\cdot10^5\cdot\cancel{S}\cdot x\Rightarrow x\approx1,2\,m$$

Eso implicaría que el cilindro ha recorrido 0,2 m, luego realmente quedarían 1,8 m de agua por encima y es incompatible con la hipótesis de partida; si hay agua encima la presión es mayor / seguirá expandiéndose y no se detendrá ahí.
-También podemos pensar que la isoterma solamente puede ser válida hasta que el volumen de gas sea el asociado a una altura de 3 m, ya que pasado ese momento ya no sigue cayendo agua, no hay disminución de presión del gas y por lo tanto ya no hay motivo para la expansión. Si calculamos a qué presión se encuentra en la isoterma justamente cuando el volumen de gas es el asociado a esos 3 m.

$$P_1V_1=P_2V_2\Rightarrow1,21\cdot10^5\cdot\cancel{S}\cdot1=P_2\cdot\cancel{S}\cdot3\Rightarrow P_2=\frac{1,21\cdot10^5}{3}=40333\,Pa$$

Vemos que esta presión es inferior a la atmosférica (101325 Pa), luego a partir de ese momento el pistón será empujado por la presión atmosférica (ya no hay motivo para que siga subiendo), y descenderá hasta que la presión del interior se iguale a la atmosférica. Volviendo a considerar un proceso lento e isotérmico, el resultado final es el calculado de x=1,2 m.