FÍSICA

4. Se pone en órbita elíptica un satélite artificial de modo que en el perigeo la velocidad v_P=36000 km/h y la altura h_P sobre la Tierra en ese punto es de 500 km. Calcular:
a) la altura del satélite h_A y su velocidad v_A en el apogeo.
b) cuál sería la velocidad mínima que debe tener el satélite al pasar por el perigeo para que escape del campo gravitatorio terrestre.
Datos: radio de la Tierra $R_T=6,37\cdot10^6$ m; $g_0=9,81$ m/s^2

a) El radio en el perigeo es $r_P=R_T+h_P=6,37\cdot10^6+500\cdot10^3=6,87\cdot10^6$ m
36000 km/h=10000 m/s
En una órbita podemos plantear dos condiciones que nos van a relacionar apogeo y perigeo:
1- La velocidad areolar es constante, y se puede demostrar que es $v_{areolar}=\frac{|\vec{L}|}{2m}$
En el perigeo los vectores r_p y v_p son perpendiculares, y podemos plantear

$$v_{areolar}=\frac{|r_P\cdot\cancel{m}\cdot v_P|}{2\cancel{m}}=\frac{6,87\cdot10^6\cdot10000}{2}=3,435\cdot10^{10}\,m^2/s$$

Por lo tanto podemos plantear que $\frac{r_A\cdot v_A}{2}=3,435\cdot10^{10}\Rightarrow r_A\cdot v_A=6,87\cdot10^{10}\,m^2/s$
Se podría llegar a la misma expresión planteando la conservación del momento angular

$$r_A\cdot\cancel{m}\cdot v_A=r_P\cdot\cancel{m}\cdot v_P$$

$$r_A\cdot v_A=6,87\cdot10^6\cdot10000=6,87\cdot10^{10}\,m^2/s$$

2. La energía mecánica es constante, y la conocemos en el perigeo

$$E_{mP}=E_{pP}+E_{cP}=-G\frac{Mm}{r_P}+\frac{1}{2}m v_P^2$$

La igualamos con la del apogeo

$$E_{mP}=E_{mA}$$

$$-G\,M\frac{\cancel{m}}{r_P}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_P^2=-GM\frac{\cancel{m}}{r_A}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2$$

No se proporcionan valores de G ni M, pero su producto podemos obtenerlo a partir de los datos

$$g_0=G\frac{M}{R_T^2}\Rightarrow GM=g_0\cdot R_T^2=9,81\cdot(6,37\cdot10^6)^2=3,98\cdot10^{14}\,N\cdot m^2 kg^{-1}$$

Sustituyendo

$$\frac{-3,98\cdot10^{14}}{6,87\cdot10^6}+\frac{(10000)^2}{2}=\frac{-3,98\cdot10^{14}}{r_A}+\frac{v_A^2}{2}$$

$$-7,93\cdot10^6=\frac{-3,98\cdot10^{14}}{r_A}+\frac{v_A^2}{2}$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, sustituimos en la segunda r_A:

$$-7,93\cdot10^6=\frac{-3,98\cdot10^{14}}{6,87\cdot10^{10}}v_A+\frac{v_A^2}{2}$$

$$v_A^2-11586\,v_A+1,586\cdot10^7=0$$

$$v_A=\frac{11586\pm\sqrt{11586^2-4\cdot1\cdot(1,586\cdot10^7)}}{2}=\frac{11586\pm8414}{2}=\frac{\cancel{10000\,m/s}}{1586/s}$$

En el apogeo la velocidad es menor, por lo que descartamos uno de los valores.

enrique@fiquipedia.es

$$r_A = \frac{6{,}87\cdot 10^{10}}{v_A} = \frac{6{,}87\cdot 10^{10}}{1586} = 4{,}22\cdot 10^7\, m$$

Ese es el radio, y se pide altura: $h_A=r_A-R_T=4{,}33\cdot10^7-6{,}37\cdot10^6=3{,}69\cdot10^7$ m=3690 km

b) Escapar el campo gravitatorio terrestre implica llegar a una posición infinitamente alejada, en la que la energía mecánica es 0. Se puede poner la fórmula o deducirla planteando la conservación de la energía mecánica:

$$Em(perigeo\ para\ escapar) = Em(\infty)$$

$$-G M \frac{\cancel{m}}{r_P} + \frac{1}{2}\cancel{m} v_{escape}^2 = 0$$

$$v_{escape} = \sqrt{2\frac{GM}{r_p}} = \sqrt{2\frac{3{,}98\cdot 10^{14}}{6{,}87\cdot 10^{6}}} = 10764\, m/s$$