



FÍSICA

3. Un condensador plano está formado por dos láminas metálicas cuadradas de 10 cm de lado. La separación entre ambas láminas es de 2 mm y el dieléctrico es el aire. Se carga a un potencial de 200 V y se desconecta. En estas condiciones se introduce una lámina metálica, descargada, de las mismas dimensiones y espesor 1 mm, de forma que quede paralela a ambas y equidistante.

- ¿Cuál será la nueva capacidad?
- Calcular el trabajo realizado al introducir la lámina.

Referencias

<http://es.slideshare.net/thonypa87/capacitores-10140334> problema 43

a) Calculamos la capacidad para un condensador plano de manera genérico:

La permitividad eléctrica del aire la consideramos igual a la del vacío.

Utilizando la ley de Gauss y asumiendo las láminas indefinidas, el módulo del campo en el exterior de una placa cargada es $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, y aplicando superposición, el campo entre dos placas cargadas

con carga opuesta es $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Al ser el campo uniforme, podemos plantear también (asumimos módulos) que

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \Rightarrow \Delta V = E \Delta x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta x$$

Utilizando la definición de densidad de carga superficial y de capacidad $C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S \epsilon_0}{\sigma \Delta x}$

Calculamos la capacidad inicial (usamos $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$)

$$C = \frac{0,1^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9}}{2 \cdot 10^{-3}} = 4,42 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 44,2 \text{ pF}$$

Al introducir la placa metálica, se inducen cargas de signos opuestos, por lo que tenemos dos condensadores en serie cargados con la misma carga, ambos tiene el mismo área que es igual al área del condensador inicial, y la separación entre placas de ambos es la misma y es 0,5 mm.

La nueva capacidad de cada uno de ellos es

$$C_1 = C_2 = \frac{0,1^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 1,77 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 177 \mu\text{F}$$

(La capacidad aumenta, ya que es misma superficie y medio pero la distancia disminuye)

La nueva capacidad del conjunto será

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{2}{C_1} \Rightarrow C_T = \frac{C_1}{2} = 8,85 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 88,5 \text{ pF}$$

b) El trabajo para introducir la lámina lo debemos asociar a la diferencia de energías electrostáticas entre ambas situaciones (no consideramos la masa de la placa ni su movimiento en el campo gravitatorio). Entre ambas situaciones se mantiene la carga, pero no necesariamente el potencial. Cualitativamente podemos ver que en la nueva situación hay menos energía almacenada: el campo entre placas es el mismo (no depende de la distancia) y es nulo dentro de la placa metálica introducida, por lo que la densidad de energía eléctrica es la misma pero está presente en menos volumen.



La energía almacenada en un condensador es $E = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

La energía almacenada inicialmente es $E_i = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} 4,42 \cdot 10^{-11} \cdot 200^2 = 8,84 \cdot 10^{-7} J$

La energía almacenada tras introducir la placa es la suma de la almacenada en los dos condensadores, que son iguales $E_f = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1}$

La carga es la misma que la inicial, la calculamos con la capacidad y el potencial inicial

$$Q = C \cdot V = 4,42 \cdot 10^{-11} \cdot 200 = 8,84 \cdot 10^{-9} C$$

$$E_f = \frac{(8,84 \cdot 10^{-9})^2}{1,77 \cdot 10^{-10}} = 4,42 \cdot 10^{-7} J$$

La diferencia de energías entre ambas situaciones, asociable al trabajo a realizar para introducir la placa

$$E_f - E_i = 4,42 \cdot 10^{-7} - 8,84 \cdot 10^{-7} = -4,42 \cdot 10^{-7} J$$