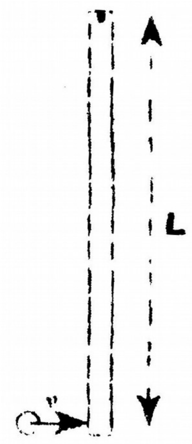
enrique@fiquipedia.es Revisado 30. octubre 2018

FÍSICA

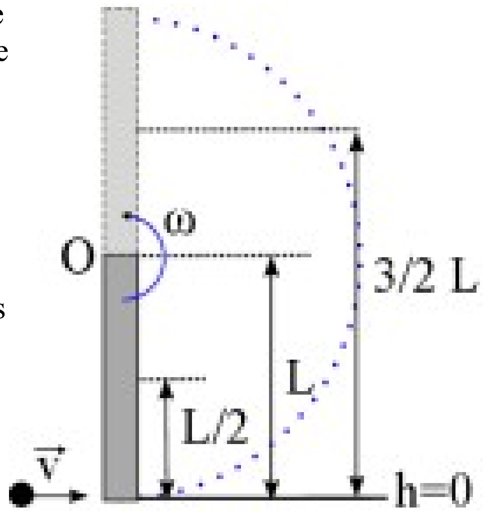
1. Una barra homogénea de longitud L y masa M cuelga de un extremo de manera que puede girar alrededor de él.
a) Calcula la velocidad v mínima que debe llevar una pequeña esfera de masa m para que al chocar y incrustarse en el extremo inferior de la barra, haga que el sistema pueda dar una vuelta completa alrededor del punto de giro.
b) Si la esfera se mueve con velocidad v produciéndose también el choque en el mismo lugar, pero ahora siendo e el coeficiente de restitución, ¿cuál es la velocidad angular ω de la barra después del impacto?



Enunciado original indica "y incrustarse"

Referencias: *http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/con_mlineal/elastico/elastico.htm*
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/conservacion/disco_varilla/discoVarilla.htm
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/conservacion/transferencia/transferencia.htm
Coeficiente de restitución en problema mecánica Extremadura 1998 Física 2

a) Se indica que la masa m se incrusta por lo que se trata de un choque inelástico, pero no todo se disipa en calor porque parte de la energía cinética mueve la barra junto con la esfera (el dato del enunciado de ser una esfera es irrelevante, la consideramos puntual)
Al ser choque inelástico no podemos plantear la conservación de energía mecánica en el choque, sino la conservación del momento angular, que tomamos respecto al punto de giro, el punto superior de la barra que llamamos O. Llamamos v_0 a la velocidad inicial de la esfera.
Como la barra es homogénea, su centro de masas está en el centro, a una distancia L/2 del eje de giro.
>Importante no confundir en desarrollo L de longitud con L de momento angular.



Antes choque:

$$L_{antes}=m\cdot v_0\cdot L$$

Tras choque, sustituyendo la expresión del momento de inercia desde el extremo de una barra

$$L_{después}=m\cdot v\cdot L+I\cdot\omega=m\cdot v\cdot L+\frac{1}{3}\cdot M\cdot L^2\cdot\frac{v}{\cancel{L}}$$

Igualando momento angular antes y después del choque

$$m\cdot v_0\cdot L=m\cdot v\cdot L+\frac{1}{3}\cdot M\cdot L\cdot v\Rightarrow v=\frac{m\cdot v_0\cdot\cancel{L}}{\cancel{L}(m+\frac{M}{3})}\Rightarrow v=\frac{m\cdot v_0}{m+\frac{M}{3}}$$

Esa es la expresión de la v, velocidad inicial de barra + masa en función de masas y de la velocidad inicial de la esfera, pero necesitamos saber la velocidad asociada a que la barra gire 180º y quede en posición vertical con velocidad 0, que será la mínima velocidad que le permite completar una vuelta.
Para ello ahora, tras el choque, planteamos conservación de energía mecánica.
Para energía potencial tomamos referencia en la parte inferior de la barra.
Para energía cinética consideramos la de traslación y la de rotación.
En el punto inferior, A:

$$E_m(A)=E_m(esfera)+E_m(barra)=E_c(esfera)+E_c(barra)+E_p(barra)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I_\omega^2+Mg\frac{L}{2}$$

Puede surgir la duda de qué momento de inercia considerar en la expresión anterior, ya que no solamente está girando la barra, sino también la esfera unida a la barra. El tema es que como para la esfera se considera el modelo puntual, la expresión de su energía cinética es ½ mv² la consideremos como energía cinética de traslación o como energía cinética de rotación respecto O, ya que ω=v/L

$$E_c(rotación\,esfera\,respecto\,O)=\frac{1}{2}I\,\omega^2=\frac{1}{2}m\cancel{L^2}\frac{v^2}{\cancel{L^2}}=\frac{1}{2}mv^2$$

El momento de inercia de la esfera respecto de O es mL², ya que toda la masa está a una distancia L del eje de giro. También se podría llegar a esa expresión utilizando el teorema de Steiner, ya que el momento de inercia de la esfera puntual respecto de su centro de masas es 0, y respecto a O a una distancia L hay que sumarle mL².

En el punto superior B, barra y esfera en reposo:

$$E_m(B)=E_m(esfera)+E_m(barra)=mg\,2L+Mg\frac{3}{2}L$$

Si igualamos ambas y sustituimos ω=v/L y la expresión del momento de inercia.

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{1}{3}M\cancel{L^2}\frac{v^2}{\cancel{L^2}}+\frac{MgL}{2}=mg\,2L+Mg\frac{3}{2}L$$

$$v^2\left(\frac{m}{2}+\frac{M}{6}\right)=gL\left(2m+\frac{3}{2}M-\frac{M}{2}\right)$$

$$v^2=2\,gL\frac{2m+M}{m+\frac{M}{3}}$$

Sustiyendo la expresión de v obtenida con la conservación del momento angular

$$\left(\frac{m\cdot v_0}{m+\frac{M}{3}}\right)^2=2\,gL\frac{2m+M}{m+\frac{M}{3}}\Rightarrow v_0=\frac{\sqrt{2\,gL(2m+M)\left(m+\frac{M}{3}\right)}}{m}$$

b) El coeficiente de restitución nos indica cuanta energía cinética se transmite en el choque / cuanta energía se pierde en el choque entre dos objetos.
Se puede definir como el cociente entre la velocidad relativa de alejamiento de los objetos tras el choque y la velocidad relativa de acercamiento de los objetos antes del choque:
- Si el cociente es 1, es una colisión perfectamente elástica, se conserva Ec.
- Si el cociente es 0 es perfectamente inelástica (los objetos se juntan y parte Ec se pierde en calor).
Llamamos 1 a la esfera y 2 a la barra, y tomamos velocidades positivas hacia derecha en diagrama.

$$Coeficiente\,restitución=\frac{v_{relativa\,alejamiento\,tras\,choque}}{v_{relativa\,acercamiento\,antes\,choque}}=\frac{v_{2f}-v_{1f}}{-(v_{2i}-v_{1i})}$$

No seguimos asumiendo que esfera y barra quedan unidas tras el choque, ya que eso implicaría que el coeficiente de restitución fuese 0 y no un valor genérico e.
Esfera velocidad inicial $v_{1i}=v_0$ y tras choque v_{1f} (no necesariamente igual a v)
Barra velocidad inicial $v_{2i}=0$ y tras choque $v_{2f}=v$ (es la velocidad con la que sale la barra)
>*Enunciado indica velocidad inicial esfera v, pero por claridad usamos aquí* v_0

$$e=\frac{v-v_{1f}}{v_0}$$

Planteamos conservación de momento angular
Antes choque:

$$L_{antes}=m\cdot v_0\cdot L$$

Tras choque (mantenemos sin sustituir ω ya que queremos obtener una expresión para ella)

$$L_{después}=m\cdot v_{1f}\cdot L+I\,\omega=m\cdot v_{1f}\cdot L+\frac{1}{3}M\,L^2\cdot\omega$$

Igualando antes y después del choque

$$m\cdot v_0\cdot L=m\cdot v_{1f}\cdot L+\frac{1}{3}\cdot M\cdot L^2\cdot\omega$$

$$\omega=m\cancel{L}\frac{(v_0-v_{1f})}{\frac{1}{3}M\cdot L^{\cancel{2}}}$$

$$\omega=3\frac{m}{ML}(v_0-v_{1f})$$

Para dejarlo en función de e, operamos y usamos v=ωL

$$e=\frac{v-v_{1f}}{v_0}\Rightarrow e\,v_0=v-v_{1f}\Rightarrow v_{1f}=v-e\,v_0=\omega\,L-e\,v_0$$

Sustituyendo

$$\omega=3\frac{m}{ML}(v_0-\omega\,L+e\,v_0)$$

$$\omega=-3\frac{m}{M\cancel{L}}\omega\cancel{L}+3\frac{mv_0}{ML}(1+e)$$

$$\omega(1+3\frac{m}{M})=3\frac{mv_0}{ML}(1+e)$$

$$\omega=\frac{3\frac{mv_0}{ML}(1+e)}{1+3\frac{m}{M}}$$

$$\omega=\frac{v_0}{L}\frac{1+e}{\frac{M}{3m}+1}$$

>Según enunciado la velocidad de la esfera que hemos llamado aquí v_0 sería v

Validaciones físicas:

- La velocidad angular es positiva (gira en el sentido contrario a las agujas del reloj en el diagrama),
- Si e=0, la expresión se convierte en la obtenida en el apartado a

$$\omega=\frac{v_0}{L}\frac{1}{\frac{M}{3m}+1}\Rightarrow v=\omega\,L=\frac{v_0}{\frac{M}{3m}+1}\Rightarrow v=\frac{m\cdot v_0}{m+\frac{M}{3}}$$

- Si M>>m y muy grande, la velocidad angular de la barra es 0 independientemente de e.
- *En la primera versión de resolución de este ejercicio (con una errata clara en el desarrollo) en la expresión final aparecía (1-e) en lugar de (1+e) y planteaba y se cumplía esta validación: "Si e=1, se tiene que la velocidad angular es 0 y la velocidad de la barra es 0, la bola sale rebotada con la misma velocidad." Tras revisarlo la expresión final no lo cumple; quizá haya un error en el planteamiento de la validación. Por revisar mejor.*