enrique@fiquipedia.es 

**Madrid 1996**

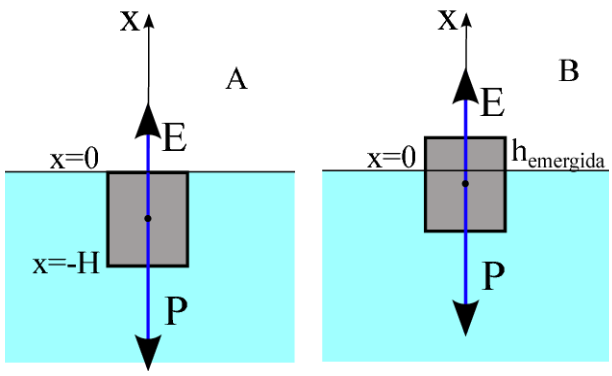
Nota: El opositor deberá contestar obligatoriamente a los problemas 3,4 y 7.
De los problemas 1 y 2 optará por uno de ellos y de los problemas, 5 y 6 elegirá otro.

PROBLEMA 2.- Un cilindro de 30 cm$^2$ de base y 2 dm de altura, se sumerge en un líquido cuya densidad es 1,5 g/cm$^3$, de modo que su generatriz quede vertical y su base superior coincidiendo con la superficie libre del líquido. Se suelta el cilindro y éste, tras un movimiento armónico amortiguado, queda en reposo, emergiendo sobre el líquido pues su densidad es tres veces menor. Calcule:
El trabajo realizado, desde que se soltó el cilindro hasta que quedó finalmente en reposo.

**Extremadura 2006**

De los ejercicios de Física: 2, 4, 6 y 8: elegir tres.
2.- Un cilindro de S = 30 cm$^2$ y H = 2 dm de altura se sumerge en un líquido de densidad 1,5 g/cm$^3$ de modo que su generatriz quede vertical y su base superior coincidiendo con la superficie libre del líquido. Se suelta el cilindro y éste, tras un movimiento armónico amortiguado, queda en reposo, emergiendo sobre el líquido pues su densidad es tres veces menor. ¿Qué trabajo se ha realizado sobre el cilindro desde que se soltó hasta que quedó finalmente en reposo? Trabajar en el Sistema Internacional.

Realizamos un diagrama, representado las dos situaciones que nombramos A y B, y definiendo nuestro sistema de referencia, con x positivas hacia arriba y x=0 en la superficie del líquido. Llamamos H a la altura del cilindro para dejar las expresiones en función de la altura, aunque en este caso H=0,2 m.
A: sumergido con su base superior coincidiendo con la superficie del líquido. Se representan solamente empuje y peso, aunque en esa situación una fuerza lo debía retener, asumimos que el diagrama es justo tras retirarla.
B: equilibrio, emergiendo una altura h emergida




Se nos pide el trabajo realizado para pasar de situación A a situación B, y enunciado parece contradictorio porque indica "amortiguado" (hay fuerzas no conservativas), pero no aporta información de esas fuerzas no conservativas, así que parece que solamente se puede plantear sin pérdidas. Pero sin pérdidas el cilindro describiría un movimiento armónico simple indefinido, pero precisamente en ese caso el trabajo realizado no estaría definido si no se acota un intervalo de tiempo, porque no habría posición final ni equilibrio.
Así que el trabajo realizado que se solicita es el trabajo de fuerzas las fuerzas no conservativas, y se puede plantear de manera general asociándolo a la variación de energía mecánica:

$$\Delta E_m = W_{fuerzas\,no\,conservativas}$$

En cualquier caso, para calcular el trabajo para pasar de situación A a situación B, primero tenemos que calcular el valor de h emergida.

**Cálculo de la posición B de equilibrio.**

Equilibrio, implica $\Sigma F_{vert} = 0 \Rightarrow Empuje = Peso$

$$V_{desalojado}\cdot\rho_{líquido}\cdot\cancel{g}=V_{cilindro total}\cdot\rho_{sólido}\cdot\cancel{g}$$
$$\cancel{\pi r^2}(H-h_{emergida})\cdot\rho_{líquido}=\cancel{\pi r^2}\cdot H\rho_{sólido}$$
$$H-h_{emergida}=H\frac{\rho_{sólido}}{\rho_{líquido}}$$
$$h_{emergida}=H\left(1-\frac{\rho_{sólido}}{\rho_{líquido}}\right)$$

Validamos consistencia física:

-Si densidad sólido es menor $\frac{\rho_{sólido}}{\rho_{líquido}}<1\Rightarrow h_{emergida}>0$ ok, flota

-Si densidades son iguales $\frac{\rho_{sólido}}{\rho_{líquido}}=1\Rightarrow h_{emergida}=0$ ok

-Si densidad sólido es mayor $\frac{\rho_{sólido}}{\rho_{líquido}}>1\Rightarrow h_{emergida}<0$ ok, se hunde

En este caso $h_{emergida}=H(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}H=\frac{0,4}{3}m$

**Cálculo del trabajo realizado por las fuerzas:**

Podemos plantear que la Em está asociada a Ep, tanto gravitatoria como Ep "de empuje", ya que el cuerpo al sumergirlo tiene una energía asociada a su posición, y podríamos definir una Ep asociada. En cualquier caso se ve que las fuerzas gravitatoria y de empuje son conservativas; almacenan Ep llevando el sistema a una posición que "devuelven" cuando el sistema regresa a esa posición. La Ep gravitatoria aumenta al subir (almacenamos energía al subir un objeto que devuelve cuando cae), y la Ep de empuje aumenta al bajar (almacenamos energía al bajar un objeto en el fluido que devuelve cuando sube).

Sin hallar una expresión para la energía potencial de empuje, calculamos el trabajo realizado por ambas fuerzas, que está asociado a la variación de energía potencia.

Para la integral de trabajo el sistema de referencia es importante: tomamos x positivas hacia arriba, y x=0 en la superficie del líquido. La fuerza no es constante en todo momento, porque el empuje varía a medida que el cilindro va subiendo.

Tomamos la posición asociada a la parte superior del bloque, que inicialmente será x=0, y aumentará hasta llegar a 2/3 de H. El trabajo total será una suma de dF asociados a subir el bloque una distancia dx.

$$dW=F\cdot dx=(E-P)\cdot dx=(S\cdot(H-x)\cdot\rho_{líquido}\cdot g-S\cdot H\cdot\rho_{sólido}\cdot g)\cdot dx$$
$$dW=S\cdot g(\rho_{líquido}(H-x)-\rho_{sólido}\cdot H)\cdot dx$$
$$W=\int_0^{\frac{2}{3}H}S\cdot g(\rho_{líquido}(H-x)-\rho_{sólido}\cdot H)\cdot dx=S\cdot g\cdot[\rho_{líquido}(Hx-\frac{x^2}{2})-\rho_{sólido}\cdot H\cdot x]_0^{\frac{2}{3}H}$$
$$W=S\cdot g\cdot(\rho_{líquido}(\frac{2}{3}H^2-\frac{4}{18}H^2)-\rho_{sólido}\cdot\frac{2}{3}L^2)=S\cdot g\cdot H^2(\rho_{líquido}\frac{4}{9}-\rho_{sólido}\cdot\frac{2}{3})$$

Se puede ver que cualitativamente hemos calculado la variación de Ep (con la integral hemos obtenido la expresión a partir de la fuerza)

Sustituyendo numéricamente con las unidades correctas de Sistema Internacional

$$W=30\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}8\cdot 0{,}2^2(1500\frac{4}{9}-\frac{1500}{3}\cdot\frac{2}{3})=0{,}392\,J$$

Ese el realizado por las fuerzas conservativas, el trabajo por las no conservativas será opuesto y negativo (energía disipada).

Si no hubiera pérdidas el cilindro oscilaría en un MAS, y la variación de energía mecánica en todo momento sería 0, ya que el trabajo de las fuerzas conservativas es $W_{FC}=-\Delta Ep$, y en este caso al tener tendencias opuestas de variación, la Ep gravitatoria ganada al subir el cilindro es la Ep de empuje perdida al subir, por lo que es cero. En este la integral no es cero porque esa energía estaría asociada a la energía del cilindro cuando emergiese esa altura en la situación B respecto de la A, pero debido al movimiento amortiguado, esa es la energía que se ha perdido (se habrá disipado como energía térmica, en calentar el agua / el cilindro). No es relevante el tiempo que tarda la oscilación en amortiguarse, podría ser, para la misma densidad, un fluido de viscosidad variable.

**Cálculo de la variación de energía cinética:**

Por el teorema de las fuerzas vivas $W_{total}=\Delta E_c$, y en A y en B la energía cinética es 0.

El trabajo total es cero, y es la suma del trabajo realizado por el peso, más el trabajo realizado por el empuje, más el trabajo no conservativo (asociado a disipación). Calculamos el trabajo realizado por el peso, que es por definición $W_{fuerzaonservativo}=-\Delta E_p$

Tomamos referencia de $E_p$ en el centro de gravedad del cilindro cuando está sumergido

$$E_p(B)=m\cdot g\cdot h_{emergida}=S\cdot H\cdot \rho_{sólido}\cdot g\cdot\frac{2}{3}H=30\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}2\cdot\frac{1500}{3}\cdot 9{,}8\cdot\frac{2}{3}0{,}2=0{,}392\,J$$

(en este caso el centro de gravedad del cilindro ha subido la misma altura que sube su cara superior)

Esto implica que $W_{peso}=-0{,}392$ J (par subir el cilindro desplazamiento y peso tienen sentidos opuestos)

$$W_{peso}+W_{empuje}+W_{NC}=0\Rightarrow -0{,}392+W_{empuje}+-0{,}392=0\Rightarrow W_{empuje}=0{,}784\,J$$

El trabajo realizado por el empuje es positivo: desplazamiento y empuje mismo sentido.

El hecho de que el trabajo realizado por el peso y por las fuerzas no conservativas coincida numéricamente no es general, se puede ver casual asociado a estos datos.

*Nota: hemos hecho planteamiento con energía cinética. Podríamos plantear $\Delta E_m=W_{FNC}$, pero habría que definir energía potencial para el caso del empuje*