



Nota: El opositor deberá contestar obligatoriamente a los problemas 3,4 y 7.
De los problemas 1 y 2 optará por uno de ellos y de los problemas, 5 y 6 elegirá otro.

PROBLEMA 1. - Un cohete se mueve en el espacio con una velocidad de 2000 m/s, en un momento dado enciende los motores expulsando los gases de combustión con una velocidad de 3000 m/s. Calcule:

- La velocidad del cohete cuando su masa se ha reducido a la mitad.
- El empuje sobre el cohete si el combustible se quema con una rapidez de 50 kg/s.

Referencias:

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/cohete1/cohete1.htm>

a) La masa del cohete va variando, por lo que expulsar cierta cantidad de gas lo impulsa de manera distinta cuando está lleno que cuando está a mitad de carga.

PLANTEAMIENTO CON CONSERVACIÓN MOMENTO LINEAL

Lo hacemos con escalares ya que tenemos un único eje

Aclaremos sistema de referencia: inercial en “sistema referencia fijo”, que es respecto al que se ha medido la velocidad inicial de 2000 m/s. Tomamos x positivas en el sentido del movimiento del cohete. El cohete no es un sistema de referencia inercial, está siendo acelerado.

$$P_{antes} = P_{después}$$

- Situación inicial (instante t) : cohete (usamos el término para la suma de nave y combustible) de masa total m_{cohete} (inicialmente será M_0), a una velocidad v (inicialmente será $v_0=2000$ m/s), pero masa y velocidad van variando con el tiempo

$$P_{antes} = m_{cohete} \cdot v_{cohete}$$

- Situación después (instante t+dt): cohete lanza una pequeña masa de gas (dm_{gas}) a una velocidad $v_{relativa\ gas}=-3000$ m/s medida desde el cohete; es una velocidad relativa al cohete (el signo será negativo al tener sentido opuesto al movimiento del cohete)

Ponemos subíndice a dm ya que no es lo mismo la masa de gas que de cohete; sabemos que $M_0=m_{gas} + m_{cohete}$, por lo que derivando $0 = dm_{gas}+dm_{cohete}$ (un aumento de masa expulsada como gas es un descenso de masa en el cohete)

La velocidad de los gases lanzados medida desde el sistema de referencia será (asumimos adición, no relativista) $v_{gas}=v_{cohete}+v_{relativa\ gas}$. (la velocidad relativa del gas incluirá el signo negativo)

El cohete queda con una masa igual a $m_{cohete}-dm_{gas}=m_{cohete}+dm_{cohete}$ (Ojo al signo!)

El cohete pasará a tener una velocidad algo mayor, $v'_{cohete}=v_{cohete}+dv$

$$P_{después} = dm_{gas} \cdot (v_{cohete} + v_{relativa\ gas}) + (M - dm_{gas}) \cdot (v_{cohete} + dv)$$

Igualando

$$m_{cohete} \cdot v_{cohete} = dm_{gas} \cdot (v_{cohete} + v_{relativa\ gas}) + (m_{cohete} - dm_{gas}) \cdot (v_{cohete} + dv)$$
$$0 = v_{relativa\ gas} \cdot dm_{gas} + m_{cohete} \cdot dv - dm_{gas} \cdot dv$$

Despreciamos $dm \cdot dv$ (realmente deberíamos haber tomado incrementos, y luego obtener infinitesimales al hacer el límite cuando el intervalo de tiempo tiende a 0, con lo que se ve más claro que el término $dm \cdot dv$, que son infinitésimos de orden superior, no se tiene en cuenta)

$$m_{cohete} \cdot dv + v_{relativa\ gas} \cdot dm_{gas} = 0 \quad (1)$$

Cambiamos $dm_{gas}=-dm_{cohete}$ y separamos para integrar

Separamos para integrar

$$dv = v_{relativa\ gas} \frac{dm_{cohete}}{m_{cohete}}$$

Integramos



$$\int_{v_0}^v dv = v_{\text{relativa gas}} \int_{M_0}^{M_0/2} \frac{1}{m_{\text{cohete}}} dm_{\text{cohete}}$$

$$v = v_0 + v_{\text{relativa gas}} \ln \frac{M_0/2}{M_0} = v_0 - v_{\text{relativa gas}} \ln 2$$

Sustituyendo $v = 2000 - (-3000) \cdot \ln 2 = 4079 \text{ m/s}$

b) Si en la expresión intermedia (1) dividimos por dt se llega a la expresión

$$m_{\text{cohete}} \frac{dv}{dt} + v_{\text{relativa gas}} \frac{dm_{\text{gas}}}{dt} = 0$$

Que reinterpretando se puede ver como

$$-v_{\text{relativa gas}} \frac{dm_{\text{gas}}}{dt} = m_{\text{cohete}} a$$

$$F = m \cdot a$$

Por lo que se puede interpretar como que el cohete es una partícula de masa variable m_{cohete} cuya aceleración $a = dv/dt$ viene dada por una fuerza $F = v_{\text{relativa gas}} \cdot dm_{\text{gas}}/dt$

Si dm_{gas}/dt es constante e igual a 50 kg/s, la fuerza es constante y es el empuje que se pide

$$F = -v_{\text{relativa gas}} \frac{dm_{\text{gas}}}{dt} = -(-3000) \cdot 50 = 150000 \text{ N}$$