Física

1. Se deja caer un cuerpo en caída libre en el campo gravitatorio terrestre y en el seno de un fluído que ofrece una resistencia al movimiento proporcional al cuadrado de la velocidad. La constante de proporcionalidad toma el valor de $1{,}0\cdot10^{-3}$ m^{-1}.
a) Razonar si existe una velocidad máxima en la caída y en caso afirmativo, hallar su valor.
b) Obtener la velocidad final después de una caída desde 100 metros de altura.

Referencias:
Enunciado muy similar a Valencia 2008 1 y a Madrid 2004 Física 2

Lo primero interpretamos las unidades de la constante; si llamamos β a la constante de proporcionalidad se puede dudar si es $F=\beta v^2$ ó $F=m\beta v^2$
Lo analizamos dimensionalmente

$$[F=m\cdot a]=\frac{M\cdot L}{T^2}$$

$$[\beta v^2]=\frac{1}{L}\frac{L^2}{T^2}=\frac{L}{T^2}$$

$$[m\beta v^2]=M\frac{1}{L}\frac{L^2}{T^2}=\frac{M\cdot L}{T^2}$$

Por lo tanto la constante no incluye la masa y es $F=m\beta v^2$
No se proporciona g, asumimos 9,8 m/s^2, aunque con 10 m/s^2 los cálculos serían más redondos.
Como enunciado da un dato con 2 cifras significativas, expresamos resultados con esas 2 cifras.
a) Necesitamos una expresión de v en función de t.
Tomamos sistema de referencia: eje x vertical, sentido positivo hacia abajo, x=0 y t=0 en el inicio del movimiento, con lo que x y v son positivas y aumentan.
Aplicamos la 2ª ley de Newton (despreciamos el empuje del fluido frente al peso, asumimos que es aire)

$$\cancel{m}g-\cancel{m}\beta v^2=\cancel{m}a$$

$$g-\beta v^2=\frac{dv}{dt}$$

Como se pide velocidad máxima, necesitamos v(t) y derivar, pero ya lo tenemos

$$\frac{dv}{dt}=0\Rightarrow g-\beta v^2=0\Rightarrow v=\sqrt{\frac{g}{\beta}}=\sqrt{\frac{9{,}8}{10^{-3}}}=98{,}99=99\,m/s$$

Comprobamos que es un máximo

$$\frac{d^2v}{dt^2}=-2\beta v\Rightarrow\frac{d^2v}{dt^2}(v=99)<0\Rightarrow máximo$$

b) Necesitamos una expresión de v en función de x.

$$g-\beta v^2=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

$$dx=\frac{vdv}{g-\beta v^2}\Rightarrow\int_0^x dx=\int_0^v\frac{vdv}{g-\beta v^2}$$

$$x=\frac{-1}{2\beta}[\ln(g-\beta v^2)]_0^v+c_1\Rightarrow-2\beta x+c_2=\ln\left(\frac{g-\beta v^2}{g}\right)$$

$$gc_3e^{-2\beta x}=g-\beta v^2$$

$$v=\sqrt{\frac{g}{\beta}\left(1-c_3e^{-2\beta x}\right)}$$

Planteamos condición: x=0 → v=0, lo que implica c_3=1, con lo que la expresión final es

$$v=\sqrt{\frac{g}{\beta}(1-e^{-2\beta x})}$$

Validaciones físicas:
-Si g mayor la velocidad es mayor
-Si β=0, sale una indeterminación 0/0, pero si se hace un desarrollo por Taylor en x=0 http://www.wolframalpha.com/input/?i=taylor+series+sqrt%28a%2Fb*%281-e^%28-2bx%29%29%29 todos los términos dependen de b y se anulan salvo el primero, con lo que $v=\sqrt{2gx}\Rightarrow v^2=2gx$ que es una expresión de MRUA
-La velocidad aumenta según cae, pero tiene un límite, ya que si x=∞ (cae durante mucho tiempo), la velocidad es constante, velocidad terminal, y el valor es el del apartado a

$$v(x=\infty)=\sqrt{\frac{g}{\beta}}$$

Numéricamente para 100 m $v=\sqrt{\frac{9,8}{1,0\cdot 10^{-3}}(1-e^{-2\cdot 1,0\cdot 10^{-3}\cdot 100})}=42\,m/s$

Podemos validar numéricamente que si fuese un MRUA, en 100 m la velocidad debe ser menor al no haber resistencia $v=\sqrt{2\cdot 9,8\cdot 100}=44\,m/s$