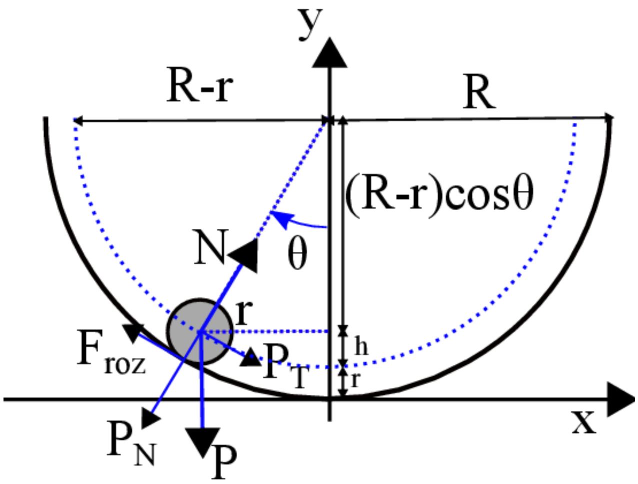
B1. Un cilindre de radi r roda sense lliscar per l'interior d'una superficie cilíndrica de radi R.
a) Fer el balanç energètic del cilindre petit.
b) Trobar el periode de les petites oscillacions.

Un cilindro de radio r rueda sin deslizar por el interior de una superficie cilíndrica de radio R.
a) Hacer el balance energético del cilindro pequeño.
b) Encontrar el periodo de las pequeñas oscilaciones.

Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/mov_general/cicloide/cicliode.htm#Balance%20energ%C3%A9tico donde se considera una superficie cóncava general.
http://core.ac.uk/download/files/334/11058206.pdf Notas de Clase: Física de Oscilaciones, Ondas y Óptica (Versión 02) 2013, NOTAS DE CLASE FISICA DE OSCILACIONES, ONDAS Y OPTICA Hernán Vivas C. Departamento de Física. Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales



a) Para hacer el balance energético llamamos A a la situación más elevada, en la que el cilindro se detiene, y B a otra situación inferior.
Llamamos m a la masa del cilindro pequeño.
Tomamos referencia de energía potencial a la altura que tiene el centro de masas del cilindro pequeño en la parte inferior del cilindro grande.
Representamos en el diagrama las fuerzas aunque se pide un balance energético (al final se hace un planteamiento dinámico pero no se pide). Hay fuerza de rozamiento que realmente es de rodadura: rueda sin deslizar, pero no implica pérdidas.
A: Altura h_0, $h_0=(R-r)-(R-r)\cdot\cos\theta_0=(R-r)(1-\cos\theta_0)$
(R-r)=Radio de giro del centro de masas del cilindro pequeño respecto al centro del cilindro grande.

$$E_p=mgh_0$$
$$E_{c\,rotación}=0$$
$$E_{c\,traslación}=0$$
$$E_m(A)=E_{m\,máx}=mg\,h_0=mg(R-r)(1-\cos\theta_0)$$

B: altura 0
Llamamos ω_r a la velocidad de giro del cilindro pequeño respecto del eje, y ω_R a la velocidad angular asociada a la variación de ángulo θ en el cilindro grande $\omega_R=d\theta/dt$

$$E_p=0$$
$$E_{c\,rotación}=\frac{1}{2}I\,\omega_r^2$$
$$E_{c\,traslación}=\frac{1}{2}m\,v^2$$

El momento de inercia del cilindro pequeño respecto de su eje es $I=\frac{1}{2}mr^2$

Aplicamos condiciones:
-Condición de rodadura del cilindro pequeño sobre la superficie del cilindro grande: $v=\omega_r\cdot r$
-Relación entre velocidad angular en cilindro grande y velocidad de traslación: $v=\omega_R\cdot(R-r)$
Combinando ambas expresiones tenemos $\omega_r r=\omega_R(R-r)$

$$E_m(B)=E_{m\,máx}=\frac{1}{2}I\,\omega_{r\,máx}^2+\frac{1}{2}m\,v_{máx}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega_{r\,máx}^2+\frac{1}{2}m(\omega_{r\,máx}r)^2$$

$$E_m(B)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)m\omega_{r\,máx}^2r^2=\frac{3}{4}m\,\omega_{r\,máx}^2r^2=\frac{3}{4}m\omega_{R\,máx}^2(R-r)^2$$

Se pide balance energético, con esta expresión se ve que partiendo de una altura inicial h_0 asociada a un ángulo inicial θ_0, quedan fijados los valores de:

Energía mecánica máxima $E_{m\,máx}=mg(R-r)(1-\cos\theta_0)=\frac{3}{4}m\omega_{r\,máx}^2r^2=\frac{3}{4}m\,\omega_{R\,máx}^2(R-r)^2$

Velocidad angular máxima en cilindro grande

$$\cancel{m}\,g\,\cancel{(R-r)}(1-\cos\theta_0)=\frac{3}{4}\cancel{m}\,\omega_{R\,máx}^2(R-r)^{\cancel{2}}$$

$$\omega_{R\,máx}=\sqrt{\frac{4}{3}g\frac{(1-\cos\theta_0)}{(R-r)}}$$

Velocidad angular máxima en cilindro pequeño

$$\cancel{m}\,g(R-r)(1-\cos\theta_0)=\frac{3}{4}\cancel{m}\,\omega_{r\,máx}^2r^2$$

$$\omega_{r\,máx}=\sqrt{\frac{4}{3}g\frac{(R-r)(1-\cos\theta_0)}{r^2}}$$

b) Para calcular el periodo de oscilaciones primero demostramos que se trata de un movimiento armónico simple.

La ecuación de un MAS implica energéticamente $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ donde x podremos considerarlo como la distancia al eje vertical, aproximadamene igual a s para oscilaciones pequeñas.

Si θ<14º, senθ≈θ y en esa situación podemos utilizar arco y ángulo ya que x=(R-r)·senθ≈(R-r)·θ=s

$$E_p=m\,g(R-r)(1-\cos\theta)$$

Usando relaciones trigonométricas $E_p=mg(R-r)2\,sen\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$

Si aproximamos para oscilaciones pequeñas

$$E_p=mg(R-r)2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2=\frac{1}{2}mg\cancel{(R-r)}\frac{s^2}{(R-r)^{\cancel{2}}}$$

$$E_p=\frac{1}{2}\frac{mg}{(R-r)}s^2=\frac{1}{2}\frac{mg}{(R-r)}x^2$$

Vemos que es una expresión $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ donde la constante recuperadora es $k=\frac{mg}{(R-r)}$

$$k=m\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{R-r}}$$

El periodo de oscilación será

$$T=\frac{2\pi}{\omega}k=2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}$$

Validaciones físicas:

Si R=r, T=0 y no oscilará.

Cuanto mayor sea la diferencia de radios, menor será la constante recuperadora y mayor será el periodo.

Cuanto mayor sea g, mayor será la constente recuperadora y menor periodo tendrá.

Aunque no se pide, realizamos el planteamiento dinámico:

La ecuación de MAS implica dinámicamente $F=-kx$ $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$ *, con misma suposición sobre x realizada en el planteamiento energético.*
Si igualamos la componente tangencial del peso a la aceleración tangencial
Ponemos signo – asociado a fuerza recuperadora y sentido tomado para el ángulo.

$$P_T=-\alpha\cdot(R-r)$$

$$mg\,sen\,\theta=\frac{-d^2\theta}{dt^2}(R-r)$$

Si θ<14º, senθ≈θ y en esa situación podemos utilizar arco y ángulo ya que x=(R-r)·senθ≈(R-r)·θ=s

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(R-r)=-mg\theta$$

$$\frac{1}{\cancel{(R-r)}}\frac{d^2s}{dt^2}\cancel{(R-r)}=-mg\frac{s}{(R-r)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-mg}{R-r}x$$

Vemos que es una expresión d $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$ *onde la constante recuperadora es* $k=\frac{mg}{(R-r)}$ *, igual que la obtenida energéticamente.*