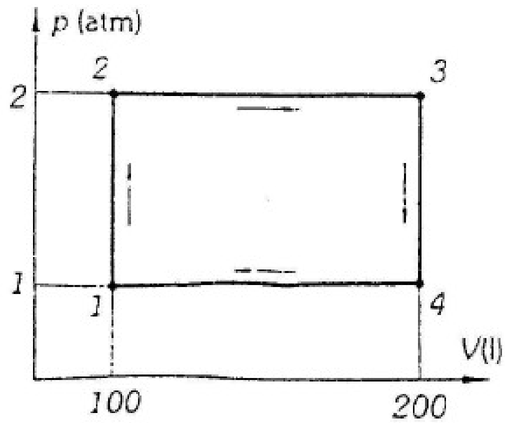
F3. Dos moles de gas ideal (c_V= 3 cal/mol.K) describen el ciclo de la figura; determinar la temperatura de cada vértice y el trabajo y calor, variación de energía interna y variación de entropía en cada una de las líneas que constituyen el ciclo, y en el ciclo total. Determinar el rendimiento del ciclo.



Referencias:
Resuelto por sleepylavoisier en http://docentesconeducacion.es/viewtopic.php?f=92&t=4018#p17891
Física Universitaria, Sears-Zemansky, Capítulo 20 La segunda ley de la termodinámica, definición de eficiencia térmica de una máquina.
En Galicia 1999-Física 2 también hay cálculo de rendimiento de ciclo

En general en problemas de termodinámica debemos comenzar dejando claro el convenio de signos usado: se utiliza el convenio IUPAC según el cual la primera ley es ΔU=Q+W, Q>0 y W>0 son aportados al sistema (no se utiliza el convenio Clausius según el cual es ΔU=Q-W)

Enunciado no indica explícitamente valor R, por lo que podríamos intentar expresar variación de temperaturas en función de variaciones de presiones y volúmenes, sin embargo se pide la temperatura de cada vértice y eso implica asignar un valor a R.
Asumimos R≈2 cal/mol·K, o por el valor de c_v asumimos que se trata de un gas monoatómico, $\gamma=c_p/c_v=5/2$, $c_p=(5/2)R$ y $c_v=(3/2)R$, con lo que $R=(2/3)c_v=2$ cal/mol·K
Como tenemos P en atm y V en L, podemos pasar R a J/mol·K y atm·L/mol·K, aunque también podemos pasar PV de atm·L a cal, que implica muliplicar por 101,325 y dividir por 4,18

$$\cancel{atm \cdot L} \cdot \frac{101325\,\cancel{Pa}}{1\,\cancel{atm}} \cdot \frac{1\,\cancel{m^3}}{1000\,\cancel{L}} \cdot \frac{1\,cal}{4{,}18\,\cancel{Pa \cdot m^3}}$$

Usando la ley de los gases ideales $T=\frac{PV}{nR}$

$$T_1=\frac{P_1 V_1}{nR}=\frac{1\cdot 100\cdot 101{,}325}{2\cdot 2\cdot 4{,}18}=606\,K$$
$$T_2=\frac{P_2 V_2}{nR}=\frac{2\cdot 100\cdot 101{,}325}{2\cdot 2\cdot 4{,}18}=1212\,K$$
$$T_3=\frac{P_3 V_3}{nR}=\frac{2\cdot 200\cdot 101{,}325}{2\cdot 2\cdot 4{,}18}=2424\,K$$
$$T_4=\frac{P_4 V_4}{nR}=\frac{1\cdot 200\cdot 101{,}325}{2\cdot 2\cdot 4{,}18}=1212\,K$$

Tramo 1-2 (isócoro), W=0, ΔU=Q

W=0 (no hay trabajo al ser el volumen constante)

Q=Q_V=**ΔU**=$nc_V\Delta T$=2·3·(1212-606)= **3636 cal** (aportado, aumenta presión a V cte)

$$\Delta S=\int\frac{\delta Q}{T};\delta Q=nc_v dT;\Delta S=nc_v\int\frac{dT}{T}=nc_v\ln(\frac{T_2}{T_1})=2\cdot 3\cdot\ln(\frac{1212}{606})=4{,}16\,cal/K$$

ΔS=4,16 cal/K Variación de entropía positiva, el sistema aumenta de temperatura a V cte.

Tramo 2-3 (isóbaro)

ΔU=nc$_v$ΔT=2·3·(2424-1212)= **7272 cal**
Q=Q$_P$=nc$_P$ΔT=2·5·(2424-1212)= **12120 cal** (positivo, aumenta T a P cte)

$$W=\int -P\cdot dV=-P\Delta V=-2\cdot(200-100)=-200\,atm\cdot L$$

$$W=-200\cdot\frac{101{,}325}{4{,}18}=-4848\,cal$$

W=-4848 cal (negativo, el sistema expande)
El trabajo también se podría calcular como W=ΔU-Q=7272-12120=-4848 cal

$$\Delta S=\int\frac{\delta Q}{T};\delta Q=n c_p dT;\Delta S=n c_p\int\frac{dT}{T}=n c_p\ln(\frac{T_3}{T_2})=2\cdot5\cdot\ln(\frac{2424}{1212})=6{,}93\,cal/K$$

ΔS=6,93 cal/K Variación de entropía positiva, el sistema aumenta de temperatura a P cte.
Tramo 3-4 (isócoro), W=0, ΔU=Q
W=0 (no hay trabajo al ser el volumen constante)
Q=Q$_V$=**ΔU**=nc$_V$ΔT=2·3·(1212-2424)= **-7272 cal** (cedido, disminuye presión a V cte)

$$\Delta S=\int\frac{\delta Q}{T};\delta Q=n c_v dT;\Delta S=n c_v\int\frac{dT}{T}=n c_v\ln(\frac{T_4}{T_3})=2\cdot3\cdot\ln(\frac{1212}{2424})=-4{,}16\,cal/K$$

ΔS=-4,16 cal/K Variación de entropía negativa, el sistema disminuye de temperatura a V cte.
Tramo 4-1 (isóbaro)
ΔU=nc$_v$ΔT=2·3·(606-1212)= **-3636 cal**
Q=Q$_P$=nc$_P$ΔT=2·5·(606-1212)= **-6060 cal** (negativo, disminuye T a P cte)

$$W=\int -P\cdot dV=-P\Delta V=-1\cdot(100-200)=100\,atm\cdot L$$

$$W=100\cdot\frac{101{,}325}{4{,}18}=2424\,cal$$

W=2424 cal (positivo, el sistema expande)
El trabajo también se podría calcular como W=ΔU-Q=-3636-(-6060)=2424 cal

$$\Delta S=\int\frac{\delta Q}{T};\delta Q=n c_p dT;\Delta S=n c_p\int\frac{dT}{T}=n c_p\ln(\frac{T_3}{T_2})=2\cdot5\cdot\ln(\frac{606}{1212})=-6{,}93\,cal/K$$

ΔS=-6,93 cal/K Variación de entropía negativa, el sistema disminuye de temperatura a P cte.
En el ciclo, al ser U, y S funciones de estado, su variación es cero.

$$\Delta U_{total}=\Delta U_{1\to2}+\Delta U_{2\to2}+\Delta U_{3\to4}+\Delta U_{4\to1}=3636+7272-7272-3636=0$$

$$\Delta S_{total}=\Delta S_{1\to2}+\Delta S_{2\to2}+\Delta S_{3\to4}+\Delta S_{4\to1}=4{,}16+6{,}93-4{,}16-6{,}93=0$$

Calor y trabajo no son funciones de estado, pero como en el ciclo la variación de energía interna es cero y por el primer principio ΔU=Q+W, sabemos que Q$_{total}$=-W$_{total}$.

$$Q_{total}=Q_{1\to2}+Q_{2\to3}+Q_{3\to4}+Q_{4\to1}=3636+12120-7272-6060=2424\,cal$$

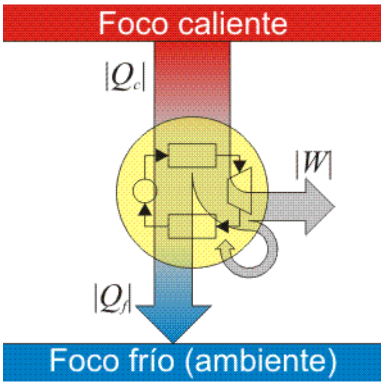
$$W_{total}=W_{1\to2}+W_{2\to3}+W_{3\to4}+W_{4\to1}=0-4848+0+2424=-2424\,cal$$

Calculamos el rendimiento del ciclo
Resumen tramos:
1-2. W$_{12}$=0 cal, Q$_{12}$=3636 cal (aportado “desde el foco caliente”)
2-3. W$_{23}$=-4848 cal (cedido), Q$_{23}$=12120 cal (aportado “desde el foco caliente”)
3-4. W$_{34}$=0 cal, Q$_{34}$=-7272 cal (cedido “al foco frío”)
4-1. W$_{41}$=2424 cal (aportado), Q$_{41}$=-6060 cal (cedido “al foco frío”)
En ciclo la variación de energía interna es nula, por lo que |aportada| = |cedida|,
|Q$_{12}$+Q$_{23}$+W$_{41}$|= |W$_{23}$+W$_{34}$+Q$_{41}$|
(validamos 3636+12120+2424=4848+7272+6060)
De manera general en una máquina térmica para un ciclo |Q$_{\text{aportado desde foco caliente}}$| = |W| +|Q$_{\text{cedido foco frío}}$|
(validamos |3626+12120|=|-4848+2424| + |-7272-6060|)
Por definición de rendimiento de una máquina térmica $\eta=\frac{|W|}{Q_{aportada\,desde\,foco\,caliente}}$

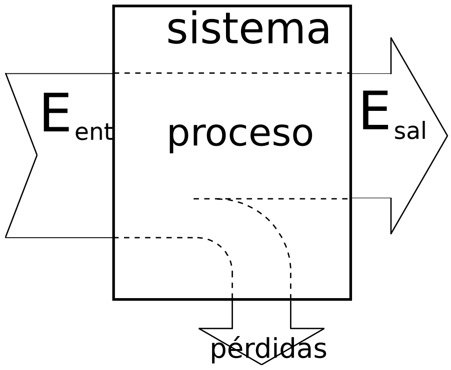
$$\eta=\frac{|W_{2\to3}+W_{4\to1}|}{Q_{1\to2}+Q_{2\to3}}=\frac{|-4848+2424|}{3636+12120}=0{,}154=15{,}4\,\%$$

Tiene que ser inferior al rendimiento máximo teórico $\eta=1-\frac{T_1}{T_3}=1-\frac{606}{2424}=75\,\%$

>Puede surgir la duda de si para calcular el rendimiento hay que considerar como energía aportada solamente la térmica o toda la aportada incluyendo el trabajo positivo del tramo 4→1; según la definición de rendimiento de máquina térmica solamente se considera el calor tomado del foco caliente.



Máquina térmica, gonfer, GFDL



Rendimiento térmico, wikimedia, cc0