Prova pràctica: segona part
Escolliu 4 problemes d'entre els 5 següentes:
5. A la superficie lateral d'un dipòsit cilindric d'alçada H, ple d'aigua, hi fem un forat a una profundidad h per sota de la superficie de l'aigua.
a) Trobeu la distància x, que separa el peu del dipòsit del punt d'impacte a terra, en funció d'H i d'h.
b) Demostreu que hi ha dos punts equidistants del punt de profunditat H/2 que donen igual distancia x.
c) En quin punt de la paret del dipòsit hem de fer el forat per aconseguir que x sigui màxima?

5. En la superficie lateral de un depósito cilíndrico de altura H, lleno de agua, hacemos un agujero en una profundidad h por debajo de la superficie del agua.
a) Encuentre la distancia x, que separa el pie del depósito del punto de impacto en el suelo, en función de H y de h.
b) Demostrar que hay dos puntos equidistantes del punto de profundidad H/2 que dan igual distancia x.
c) ¿En qué punto de la pared del depósito debemos hacer el agujero para conseguir que x sea máxima?

Referencias:
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Torricelli
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/dinamica/vaciado/vaciado.htm
Similitudes con Valencia 2004-5

a) Utilizamos la ecuación de Bernouilli $p+\rho g z+\frac{1}{2}\rho v^2=cte$ e igualamos en dos puntos del depósito. Tomamos z como altura con z=0 en la superficie del depósito, valores positivos crecientes hacia arriba, por lo que z tiene sentido opuesto a h que es profundidad, tomándose h como profundidad positiva. *Como con la referencia tomada h=-z, supone ρgz=-ρgh, y supone valores numéricos negativos de mayor valor absoluto en la expresión de Bernouilli a mayor h y mayor profundidad. Puede parecer contradictorio, porque parece sugerir que la presión es menor a medida que z aumenta, mientras que la presión es mayor según se desciende al ser mayor la columna de agua: la expresión de presión hidrostática P=ρgh se puede ver como ΔP=ρgΔh para el caso de tomar referencia P=0 donde se fije h=0, y para el caso de usar z=-h, los incrementos cambian de signo* $\Delta z=z_f-z_i=-h_f-(-h_i)=-\Delta h$*, se llega a que ΔP=ρgΔh=-ρgΔz.*
Sustituir el término de presión de altura en el punto inferior como -ρgh y que de un valor negativo, inferior a la superficie, está asociado al desarrollo de Bernouilli (ver desarrollo XXXX-Andalucía-F3) en el que se hace un planteamiento energético en el que energía potencial gravitatoria perdida por el sistema puede ser utilizada en energía cinética del líquido)
A: superficie superior
-Término presión fluido: Presión atmosférica
-Término presión cinética: v=0 (asumimos que el depósito es ancho y el agujero pequeño)
-Término presión altura: 0
B: agujero inferior
-Término presión fluido: Presión atmosférica
-Término presión cinética: v_{salida}
-Término presión altura: -ρgh
Igualando ambos términos

$$\cancel{P_{atm}}+0+0=\cancel{P_{atm}}-\rho g h+\frac{1}{2}\rho v_{salida}^2$$
$$v_{salida}=\sqrt{2gh}$$

El chorro de salida lo podemos considerar un lanzamiento horizontal con esa velocidad, composición de MRU horizontal y MRUA vertical. Tomamos eje y vertical y con valores positivos hacia arriba, con lo que a=-g m/s^2, con referencias x=0 en borde depósito, y=0 en el suelo. H es positivo, y h como profundidad también positivo.

MRUA vertical: $y=y_0+v_{0y}t+½at^2$, en este caso $y=(H-h)-½gt^2$. El tiempo que tarda en llegar al suelo es $t=\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$

MRU horizontal: $x=x_0+v_{0x}t$, en este caso $x=\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}=2\sqrt{h(H-h)}$

b) Se nos pide demostrar que hay dos valores h_1 y h_2 tales que ambos distan la misma distancia del punto central del depósito H/2. Si tomamos h_1 el punto por encima y h_2 el punto por debajo de ese punto medio, teniendo en cuenta que H y h son positivos.

$h_1-H/2=H/2-h_2$, luego equivale y tenemos que llegar a comprobar que $h_1+h_2=H$.

$$2\sqrt{h_1(H-h_1)}=2\sqrt{h_2(H-h_2)}$$
$$h_1H-h_1^2=h_2H-h_2^2$$
$$H(h_1-h_2)=h_1^2-h_2^2=(h_1+h_2)(h_1-h_2)$$
$$H=h_1+h_2$$

c) Para conseguir un alcance x máximo respecto h, derivamos x respecto a h e igualamos a 0.

$$\frac{dx}{dh}=\frac{d(2\sqrt{h(H-h)})}{dh}=\frac{2}{2}\frac{1}{\sqrt{h(H-h)}}(H-2h)=\frac{H-2h}{\sqrt{h(H-h)}}$$
$$\frac{dx}{dh}=0\Rightarrow H-2h=0\Rightarrow h=\frac{H}{2}$$

El alcance máximo se alcanza realizando el agujero en el punto medio del depósito.

Podemos realizar la segunda derivada y sustituir para comprobar que es un máximo.

$$\frac{d^2x}{dh^2}=\frac{d(\frac{H-2h}{\sqrt{h(H-h)}})}{dh}=\frac{-2\cdot\sqrt{h(H-h)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h(H-h)}}(H-2h)^2}{h(H-h)}$$

Si h=H/2, h(H-h)=H/2(H-H/2)=H/2·H/2=H^2/2^2

$$\frac{d^2x}{dh^2}(x=\frac{H}{2})=\frac{-2\cdot\frac{H}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{H}{2}}(H+2\frac{H}{2})^2}{\frac{H^2}{2^2}}=(-H-\frac{4H^2}{H})\frac{2^2}{H^2}=-20\frac{H}{H^2}=\frac{-20}{H}<0\, máximo$$