enrique@fiquipedia.es Revisado 17 junio 2016

Prova pràctica: segona part
Escolliu 4 problemes d'entre els 5 següentes:
1. Una bola de gel a 0 ºC, de radi 10 cm, está recoberta per una capa de suro de 5 cm, el qual té una conductividad tèrmica $K_1$=0,04 W/(m.K). Si la paret externa es troba a una temperatura constant de 22 ºC, determineu:
a) el temps que trigará el gel en fondre's.
b) si el suro s'hagués recobert amb una capa d'argila d'1 cm de grossor i conductivitat tèrmica $K_2$=0,048 W/(m.K), quant temps trigaria el gel en fondre's?
Dades: densitat gel = 1 g/cm$^3$, calor de fusió gel L = 80 cal/g

*1. Una bola de hielo a 0 ºC, de radio 10 cm, está recubierta por una capa de corcho de 5 cm, el cual tiene una conductividad térmica $K_1$ = 0,04 W / (m·K). Si la pared externa se encuentra a una temperatura constante de 22 ºC, determine:*
*a) el tiempo que tardará el hielo en derretirse.*
*b) si el corcho se hubiera recubierto con una capa de arcilla de 1 cm de grosor y conductividad térmica $K_2$ = 0,048 W / (m·K), cuánto tiempo tardaría el hielo en derretirse?*
*Datos: densidad hielo = 1 g / cm$^3$, calor de fusión hielo L = 80 cal / g*

***En general en problemas de termodinámica debemos comenzar dejando claro el convenio de signos usado: se utiliza el convenio IUPAC según el cual la primera ley es ΔU=Q+W, Q>0 y W>0 son aportados al sistema (no se utiliza el convenio Clausius según el cual es ΔU=Q-W)***

a) Utilizamos la ley de Fourier $\frac{dQ}{dt}=KS\frac{\partial T}{\partial x}$

Planteamos la conservación de energía como flujo en este caso, igualamos la cantidad de calor por unidad de tiempo que aporta el exterior a través del corcho con la cantidad de calor por unidad de tiempo que recibe el hielo, que estará asociada a su aumento de energía interna al fundirse

$$\frac{dQ}{dt}_{entra\,en\,hielo}=\frac{-dQ}{dt}_{cede\,exterior}$$

$$\frac{dQ}{dt}_{recibe\,hielo}=-K_1 S\frac{\partial T}{\partial x}$$

Con convenio de signos IUPAC la cedida por el exterior es negativa y la aportada al hielo positiva; la suma de ambas es cero.
En este caso utilizamos coordenadas esféricas asumiendo que la temperatura es constante para una distancia radial dada, la transferencia es unidimensional, y usamos dr entre los que habrá dT, que tienen de superficie $S=4\pi r^2$

$$\frac{dQ}{dt}_{recibe\,hielo}=-K_1\cdot 4\pi r^2\frac{dT}{dr}$$

Asumimos dQ/dt es constante y lo llamamos Φ (flujo de calor estacionario)

$$\Phi=-K_1\cdot 4\pi r^2\frac{dT}{dr}$$

$$\Phi\frac{dr}{r^2}=-K_1 4\pi dT$$

$$\Phi\int_{R_{esfera}}^{R_{esfera}+r_{corcho}}\frac{dr}{r^2}=-K_1 4\pi\int_{T_{int}}^{T_{ext}}dT$$

$$\Phi\left[\frac{-1}{r}\right]_{0,1}^{0,1+0,05}=-0,04\cdot 4\pi[T]_0^{22}$$

$$\Phi=\frac{-0,04\cdot 4\pi\cdot(0-22)}{\frac{-1}{0,15}+\frac{1}{0,1}}=3,32\,W\,ó\,\frac{J}{S}$$

El calor que debe recibir todo el hielo que está a 0 ºC para fundirse es (usamos cm y g como unidades intermedias para utilizar los datos de enunciado)

$$Q=m\cdot L=\frac{4}{3}\pi R^2\cdot\rho\cdot L=\frac{4}{3}\pi 10^3\cdot 1\cdot 80=335103\,\cancel{cal}\frac{4,18\,J}{1\cancel{cal}}=1,4007\cdot 10^6\,J$$

*>Calor aportar es elevado: una bola de 10 cm de radio de hielo tiene una masa de más de 4 kg.*

$$\frac{dQ}{dt}=\Phi\Rightarrow\int dQ=\Phi\int dt\Rightarrow Q=\Phi t\Rightarrow t=\frac{Q}{\Phi}=\frac{1,4007\cdot 10^6}{3,32}=422\cdot 10^3\,s\approx 117\,h$$

*>El tiempo es elevado: la conductividad del corcho es muy baja*
*http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/tables/thrcn.html*

b) Para la asociación de medios utilizamos el concepto de "Resistencia térmica" $R=\frac{\Delta T}{\Phi}=\frac{\Delta x}{K S}$ con lo que la ley de Fourier se puede expresar como $\Phi=\frac{\Delta T}{R}$ que permite combinar resistencias utilizando analogía con la ley de Ohm.

La resistencia asociada a los 10 cm de corcho es

$$R_{corcho}=\frac{22-0}{3,32}=6,63\frac{ºC}{W}$$

Validamos el cálculo de manera general

$$R_{corcho}=\left|\frac{\Delta T}{\Phi}\right|=\left|\frac{\frac{-1}{r_{ext}}+\frac{1}{r_{int}}}{-K_1\cdot 4\pi}\right|=\left|\frac{\frac{-1}{0,15}+\frac{1}{0,1}}{-0,04\cdot 4\pi}\right|=6,63\frac{ºC}{W}$$

Usando el mismo cálculo para la capa de arcilla

$$R_{arcilla}=\left|\frac{\frac{-1}{0,16}+\frac{1}{0,15}}{-0,048\cdot 4\pi}\right|=0,69\frac{ºC}{W}$$

Combinamos ambas resistencias en serie

$$R_{equivalente}=R_{corcho}+R_{arcilla}=6,63+0,69=7,32\frac{ºC}{W}$$

$$\Phi_{corcho+arcilla}=\frac{\Delta T}{R_{equivalente}}=\frac{22}{7,32}=3\,W$$

Si volvemos a despejar

$$t=\frac{Q}{\Phi_{corcho+arcilla}}=\frac{1,4007\cdot 10^6}{3}=467\cdot 10^3\,s\approx 130\,h$$

Validación física: tiene que tardar más tiempo si añadimos más capa aislante.