CUESTIONES DE FÍSICA

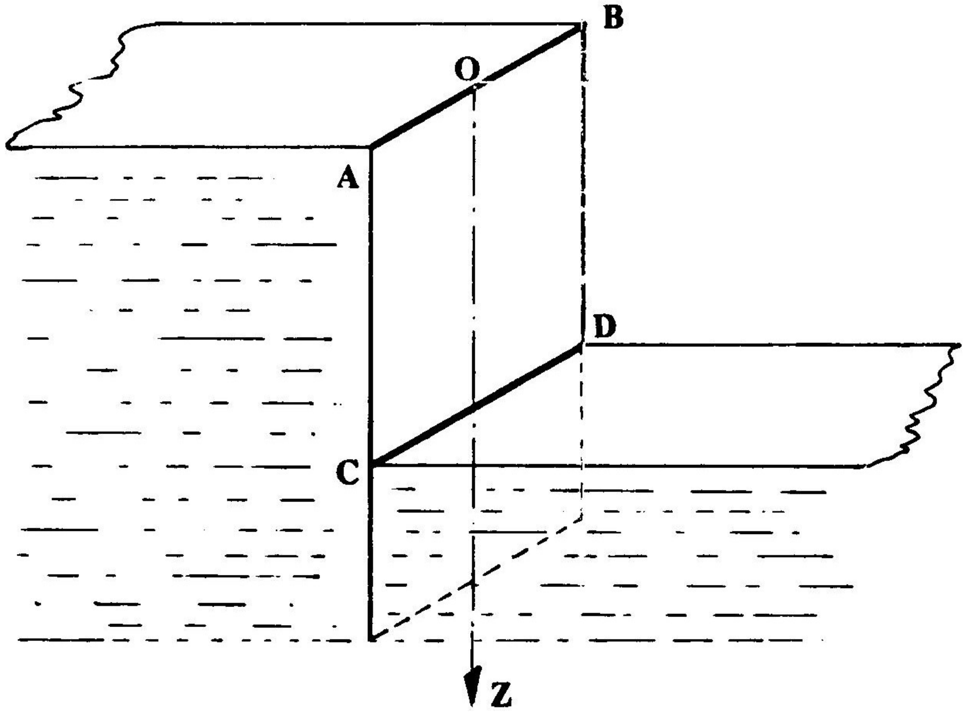
De entre las cuestiones 1, 2, 3 y 4 que a continuación se proponen, el aspirante elegirá libremente y contestará a 3 de ellas.

1.- Una puerta de esclusa vertical, de anchura AB = a, separa dos planos de agua (uno corresponde a AB y el otro a CD) cuya diferencia de alturas es AC = b. Considerando que O es el punto medio de AB y que las cotas (descendentes) se miden sobre OZ:

a) Calcular, en función de su distancia z al punto O, el valor de la fuerza presionante df que se ejerce sobre un elemento de la esclusa, de altura dz. Representar geométricamente la variación de df en función de z.

b) Hallar el valor de la resultante F de estas fuerzas elementales.

c) Determinar el punto de aplicación P de la resultante F, calculando su distancia OP al punto O.



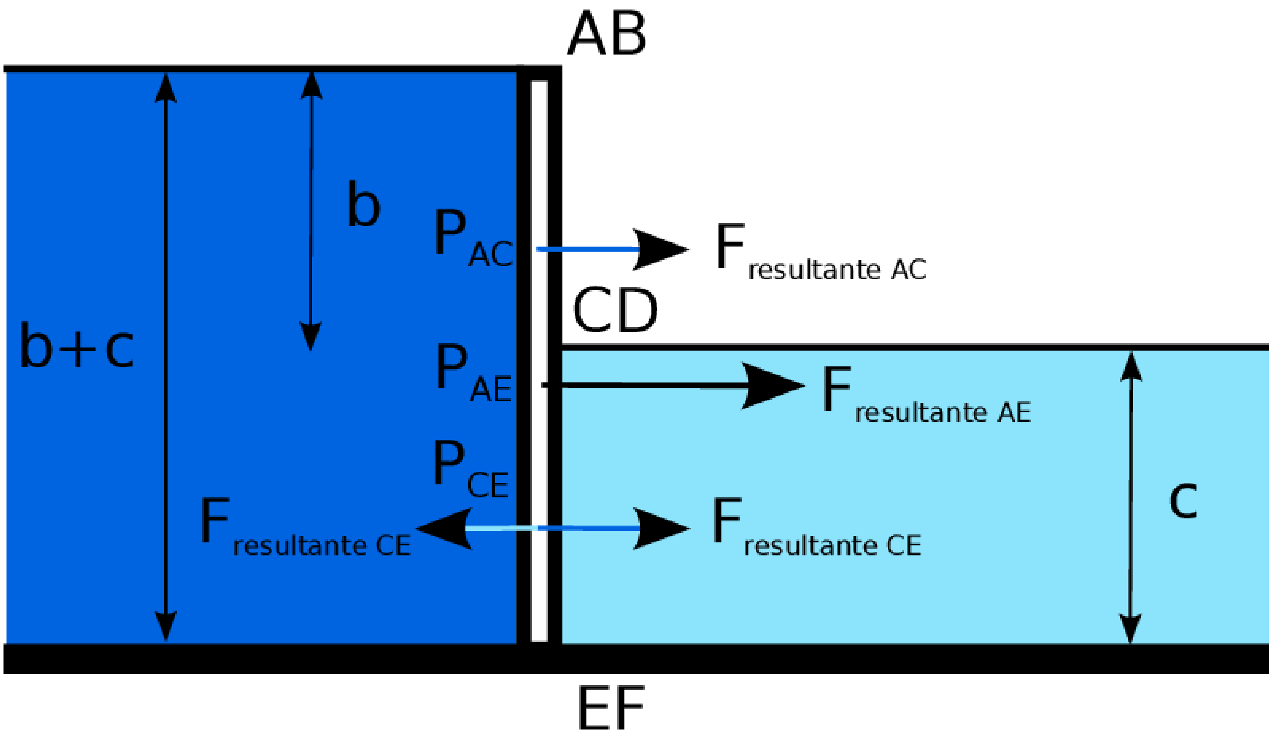
Referencias:

Problema similar a problema 1 de Castilla y León 2015

http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/cramirez/documentos/Problemas_compuerta_y_manometro_2009.pdf

a) Utilizando el principio fundamental de estática de fluidos, la presión hidrostática a una profundidad z será P=dgz (consideramos solamente el agua como fluido, sin considerar presión atmosférica). La fuerza asociada a esta presión se ejerce por el principio de Pascal en todas las direcciones, incluyendo la dirección perpendicular al plano de la esclusa.

Para que haya dos niveles de agua en la figura, a la izquierda y la derecha de la esclusa, **la esclusa debe llegar hasta el fondo** (si no lo hiciera no sería una esclusa / por el principio de vasos comunicantes no habría dos niveles de agua), pero la figura del enunciado no indica ni nombra explícitamente la profundidad de agua por debajo del segmento CD, aunque sí aparece agua por debajo de CD y sí representa una línea discontinua que indica el fondo. Nombramos puntos EF en el fondo, y llamamos c a la distancia del segmento CD hasta el segmento EF en el fondo.



Desde segmento AB hasta llegar al segmento CD, la única presión es asociada al agua de la izquierda en el diagrama, y sobre un elemento de la esclusa, de altura dz, la fuerza será df=P·dS=dgz·a·dz

Desde segmento CD hasta llegar al segmento EF, la presión es la suma de presiones que ejerce el agua a ambos lados, que se restarán; la presión del lado izquierdo será mayor, y podemos plantear.

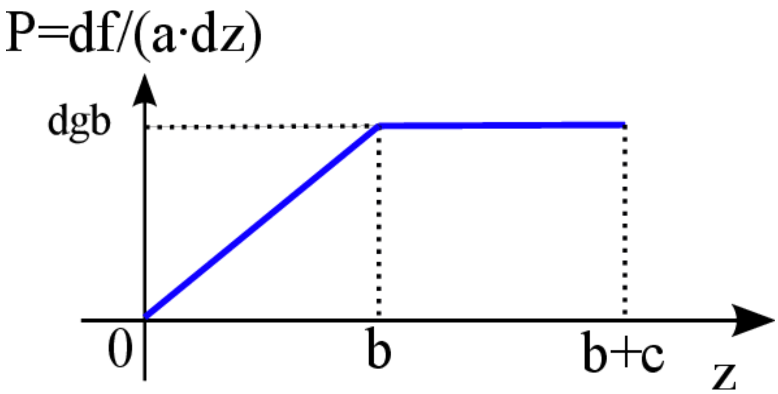
$df=P_{izquierda}\cdot dS-P_{derecha}\cdot dS=(dgz-dg(z-b))\cdot a\cdot dz=dg(z-z+b)\cdot a\cdot dz=dgb\cdot a\cdot dz$

Se pide "Representar geométricamente la variación de df en función de z", y eso literalmente supondría una representación gráfica df vs z, pero df es un diferencial y debe quedar asociado a otro diferencial, que es dz; para darle sentido físico representamos P=df/dS=df/(a·dz) en función de z.

Lo representamos cualitativamente, podríamos usar datos no proporcionados pero que se pueden asumir conocidos, densidad del agua 1000 kg/m^3 y g=9,8 m/s^2.

Si 0 < z < b: P=df/(a·dz)=dg·z (variación lineal, desde 0 hasta un máximo "dgb")

Si b < z: P=df/(a·dz)=dgb (valor constante)



b) La fuerza resultante de estas fuerzas elementales es (tomando sentido positivo la fuerza hacia la derecha en el diagrama)

Para el tramo AC: $F_{resultante\ AC}=\int_0^b df=\int_0^b dga\cdot z\cdot dz=dga\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^b=dga\frac{b^2}{2}$

Para el tramo CE: df es constante, pero la fuerza aumentará cuanto mayor sea la profundidad

$$F_{resultante\ CE}=\int_0^c df=\int_0^c dgab\cdot dz=dgabc$$

La fuerza resultante total es $F_{resultante\ AE}=dga\frac{b^2}{2}+dgabc=dga\left(\frac{b^2}{2}+bc\right)$

c) Para el punto de aplicación de la fuerza resultante, lo planteamos como un caso de fuerzas paralelas, de modo que la suma de los momentos de fuerza respecto de O sea igual al momento

total, siendo la fuerza la ya calculada anteriormente.
Lo hacemos para las dos fuerzas y para la total
Tramo AC:

$$\int_0^b z\cdot df = F_{resultante\ AC}\cdot z_{P_{AC}}$$

$$\int_0^b \cancel{dga}\cdot z^2\, dz = \cancel{dga}\frac{b^2}{2}\cdot z_{P_{AC}}$$

$$\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^2}{2}\cdot z_{P_{AC}} \Rightarrow \frac{b^3}{3} = \frac{b^2}{2}\cdot z_{P_{AC}} \Rightarrow z_{P_{AC}} = \frac{2}{3}b$$

La distancia desde setmento AB con punto O a P_{AC} sería (2/3)b
Tramo CE: (aquí hay que integrar entre b y b+c, no entre 0 y c, ya que son distancias respecto de O)

$$\int_b^{b+c} z\cdot df = F_{resultante\ CE}\cdot z_{P_{CE}}$$

$$\int_b^{b+c} \cancel{dgab}\cdot z\cdot dz = \cancel{dgab}\, c\, z_{P_{CE}}$$

$$\left[\frac{z^2}{2}\right]_b^{b+c} = c\cdot z_{P_{AC}} \Rightarrow \frac{(b+c)^2 - b^2}{2} = c\cdot z_{P_{CE}} \Rightarrow z_{P_{CE}} = \frac{c^2 - 2bc}{2c} = \frac{c-2b}{2}$$

La distancia desde segmento AB con punto O a punto P_{CE} sería (c-2b)/2
Para toda la esclusa, AE

$$\int_0^b z\cdot df + \int_0^{b+c} z\cdot df = F_{resultante\ AE}\cdot z_{P_{AE}}$$

$$\int_0^b \cancel{dga}\cdot z^2\, dz + \int_0^{b+c} \cancel{dga}\, b\cdot z\cdot dz = \cancel{dga}\left(\frac{b^2}{2} + bc\right)\cdot z_{P_{AE}}$$

$$\frac{b^3}{3} + b\frac{(b+c)^2 - b^2}{2} = \left(\frac{b^2}{2} + bc\right)\cdot z_{P_{AE}}$$

$$z_{P_{AE}} = \frac{2b^3 + 3bc^2 + 6b^2 c}{6}\cdot\frac{2}{b^2 + 2bc} = \frac{2b^2 + 3c^2 + 6bc}{3b + 6c}$$

(también se podría plantear como $F_{resultante\ AC}\cdot z_{P_{AC}} + F_{resultante\,CE}\cdot z_{P_{CE}}\cdot z_{P_{CE}} = F_{resultante\ AE}\cdot z_{P_{AE}}$)
En el caso de c=0, se convierte en la expresión para el tramo AC, y para b=0 se convierte en la expresión para el tramo CE.