F2. Si fuese posible excavar un pozo que atravesara la Tierra a lo largo de su diámetro, y se dejase caer en él una masa “m”, determinar:
1. El período de movimiento de dicha masa.
2. Su velocidad cuando pase por el centro de la Tierra.
(Se prescinde de la resistencia del aire y se supone que la Tierra es una esfera homogénea de densidad “δ” y radio “R”),

Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/tunel/tunel.htm#T%C3%BAnel%20por%20el%20interior%20de%20la%20Tierra
Similar a Cataluña 1995-1-1 y Cataluña 1999-1-1
No se dan valores numéricos, se da resultado como expresiones, usando la letra δ para densidad porque es la que usa enunciado, aunque es más habitual usar ρ.

1. Si aplicamos la ley de Gauss en el interior de la Tierra, se comprueba que el campo gravitatorio en el interior varía linealmente $g=\frac{g_0}{R}r$

Como no aparece en enunciado g_0 en la superfice, lo expresamos en función de densidad y radio que es lo que indica enunciado

$$g_0=G\frac{M}{R^2}=G\frac{\delta\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2}=\frac{4}{3}\pi G\delta R$$

Si tomamos eje x según el diámetro, con x=0 en el centro y x positivas dirigidas hacia la entrada del pozo por la que se deja caer la masa, tenemos

$F=-mg\Rightarrow a=-g=\frac{-g_0}{R}x$ que es la expresión de un movimiento armónico simple $a=-\omega^2 x$

$$\omega^2=\frac{g_0}{R}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{\frac{4}{3}\pi G\delta R}}=2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\delta}}$$

El periodo no depende de la masa m ni del radio R.

2. El centro de la Tierra es el punto de equilibrio de este movimiento armónico simple, en el que la energía potencial es nula y la cinética y la velocidad son máximas. La velocidad máxima de un movimiento armónico simple es ωA, siendo en este caso A=R, luego la velocidad máxima sería

$$v_{máx}=\omega A=R\sqrt{\frac{4\pi G\delta}{3}}$$

Podemos validar las expresiones viendo que con datos reales se obtienen valores de T y vmáx que se pueden comprobar con referencias:
$G=6{,}67\cdot10^{-11}$ N·mp·kg^{-2}; $R=6{,}37\cdot10^6$ m, $M_T=5{,}98\cdot10^{24}$ kg

$$\delta=\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{5{,}98\cdot10^{24}}{\frac{4}{3}\pi(6{,}37\cdot10^6)^3}=5523\,kg/m^3$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\delta}}=2\pi\sqrt{\frac{3}{4\cdot\pi\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5523}}=5058\,s\approx84\,min$$

$$v_{máx}=R\sqrt{\frac{4\pi G\delta}{3}}=6{,}37\cdot10^6\cdot\sqrt{\frac{4\pi6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5523}{3}}=7913\,m/s$$