Se realizan conjuntamente Cataluña y Baleares ya que son el mismo problema, aunque en cada uno se piden cosas ligeramente distintas y uno de ellos tiene valores númericos.

Cataluña B3. Un punt material de massa m es mou sense fricció i sota l'acció de la gravetat sobre una esfera de 3 m de radi i amb centre en el punt O. L'esfera es rescolza sense possibilitat de desplaçarse sobre un pla horitzontal. Suposem que el punt material inicia el moviment, sense velocitat inicial, des d'un punt infinitesimalment pròxim al punt més alt de lèsfera. La partícula deixa de fer contacte amb l'esfera al punt P. Calculeu:
a- L'angle que forma la línea OP amb la vertical que passa pel centre de l'esfera.
b- La distància entre el punt en què la partícula farà contacte amb el pla horitzontal i el punt de contacte de l'esfera amb aquest pla.

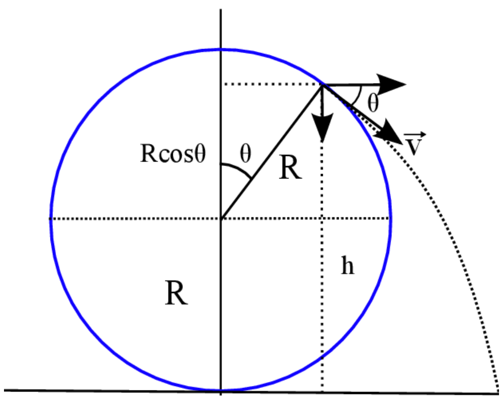
Baleares 3. A la part més alta d'una esfera de radi R, la qual descansa al terra, s'hi col·loca una moneda de masa m. Si a la moneda li donam una petita empenta horitzontal i aquesta llisca al llarg de la superficie de l'esfera sense fricció, calcula: el punt en el qual abandona la superficie de l'esfera, la velocitat de la moneda en aquesta punt i la velocitat amb la qual arriba al terra.

Cataluña B3. Un punto material de masa m se mueve sin fricción y bajo la acción de la gravedad sobre una esfera de 3 m de radio y con centro en el punto O. La esfera se apoya sin posibilidad de desplazarse sobre un plano horizontal. Supongamos que el punto material inicia el movimiento, sin velocidad inicial, desde un punto infinitesimalmente próximo al punto más alto de la esfera. La partícula deja de hacer contacto con la esfera en el punto P. Calcular:
a- El ángulo que forma la línea OP con la vertical que pasa por el centro de la esfera.
b- La distancia entre el punto en que la partícula hará contacto con el plano horizontal y el punto de contacto de la esfera con este plano.

Baleares 3. En la parte más alta de una esfera de radio R, la cual descansa en el suelo, se coloca una moneda de masa m. Si a la moneda le damos un pequeño empujón horizontal y esta se desliza a lo largo de la superficie de la esfera sin fricción, calcula: el punto en el que abandona la superficie de la esfera, la velocidad de la moneda en este punto y la velocidad con la que llega al suelo.

Similar a fase local olimpiadas física Madrid , Problema 1 2015 y cuestión 6 2012.
Referencia: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/cupula/cupula.htm

a) La partícula que cae deja de estar en contacto cuando tiene cierta velocidad y la componente de la fuerza de la gravedad que curva la trayectoria no es lo suficientemente grande y deja de haber normal. Enunciado indica partícula puntual; no se gasta energía en hacerla rodar sobre su eje mientras cae sobre la esfera. Enunciado indica que $v_0=0$.



Si realizamos un diagrama del instante en el que se pierde el contacto, la partícula lleva cierta v, está "en contacto pero sin normal" habiendo recorrido un ángulo desde la vertical θ, y descendido hasta una altura h respecto a la base de la esfera. En cualquier momento la altura respecto al plano horizontal es $h=R+R\cos\theta$

=R(1+cosθ)
Se puede razonar que justo en ese instante la componente radial de la fuerza de la gravedad es la fuerza centrípeta, y que esa componente radial es F=mg·cosθ

Si igualamos a la fuerza centrípeta $F_c = F_{g\,radial} \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{R} = \cancel{m}g\cos\theta \Rightarrow \frac{v^2}{gR} = \cos\theta$

Para calcular la relación entre h y v, utilizamos la conservación de energía mecánica entre el punto superior y el punto a altura h, cuando ha descendido una altura 2R-h.

$$\cancel{m}g2R = \cancel{m}gh + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Rightarrow 2g(2R-h) = v^2$$

Igualando para despejar el ángulo $\cos\theta = \frac{2\cancel{g}(2R-h)}{\cancel{g}R} = \frac{4R-2h}{R} = 4-2\frac{h}{R}$

Aplicando que $h = R(1+\cos\theta) \Rightarrow \frac{h}{R} = 1+\cos\theta$

$$\cos\theta = 4-2(1+\cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = 2-2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48{,}19^o.$$

b) La altura a la que la bola abandona la esfera es h=R(1+cosθ)=R(1+2/3)=R(5/3)
>Esa expresión es válida como resolución en Baleares
>En el caso de Cataluña que se pide valor numérico, h=3·(5/3)=5 m
Conocida la altura, calcular la distancia a la base de la esfera del punto en el que impacta en el plano horizontal es realizar los cálculos asociados a un tiro parabólico, con velocidad inicial dirigida hacia abajo con un ángulo igual a θ=48,19º. Tomamos referencia z=0 en el plano horizontal.

El módulo de velocidad inicial es $v = \sqrt{gR\cos\theta} = \sqrt{gR\frac{2}{3}}$

>Esa expresión es válida como resolución en Baleares (se pide velocidad y es un vector, pero se indica módulo, dirección (ángulo) y sentido en diagrama)

>En el caso de Cataluña que se pide valor numérico $v = \sqrt{9{,}8\cdot 3\cdot\frac{2}{3}} = 4{,}43\,m/s$

En cuanto a la velocidad con la que llega abajo, calculamos primero el tiempo de caída

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow sen\,\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$z = z_0 + v_{0z}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \Rightarrow 0 = \frac{5}{3}R - \sqrt{gR\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot t + \frac{1}{2}(-g)\cdot t^2 \Rightarrow -\frac{g}{2}t^2 - \sqrt{gR\frac{10}{27}}t + \frac{5}{3}R = 0$$

$$t = \frac{\sqrt{gR\frac{10}{27}} \pm \sqrt{\left(\sqrt{gR\frac{10}{27}}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{-g}{2}\right)\cdot\frac{5}{3}R}}{2\cdot\left(\frac{-g}{2}\right)} = \frac{\sqrt{gR\frac{10}{27}} \pm \sqrt{gR\frac{10}{27} + gR\frac{10}{3}}}{-g}$$

$$t = \sqrt{gR10}\frac{\sqrt{\frac{1}{27}} \pm \sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}}}{-g} = \sqrt{\frac{R}{g}}10\left(-\sqrt{\frac{1}{27}} \mp \sqrt{\frac{10}{27}}\right) = \overset{\cancel{negativo}}{\sqrt{\frac{R}{g}}10\left(\sqrt{\frac{10}{27}} - \sqrt{\frac{1}{27}}\right)}$$

Cuando llega al suelo la componente horizontal de la velocidad se mantiene y verticalmente

$$v_z = v_{0z} - g\cdot t = \sqrt{gR\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{5}}{3} - g\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}10\left(\sqrt{\frac{10}{27}} - \sqrt{\frac{1}{27}}\right)$$

Dando las componentes horizontal y vertical de la velocidad en el suelo se da por respondido: se puede calcular módulo y dirección y sentido (ángulo que forma con la horizontal), no se hace porque es una expresión farragosa y no aporta nada.

>En el caso de Cataluña que se piden valores numéricos

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}10}\left(\sqrt{\frac{10}{27}}-\sqrt{\frac{1}{27}}\right)=\sqrt{\frac{3}{9,8}\cdot 10}\left(\sqrt{\frac{10}{27}}-\sqrt{\frac{1}{27}}\right)=0,73\,s$$

Horizontalmente habrá recorrido: x=v·t=4,43·2/3·0,73=2,16 m
Como se pide la distancia al centro de la esfera, calculamos cual era la distancia inicial:
x=3·sen(48,19º)=2,27 m
La distancia total al centro de la semiesfera sería 2,27+2,16=4,43 m.
Cualitativamente podemos validar que debe ser un punto cercano al borde de la semiesfera, que tiene de radio 3 m.