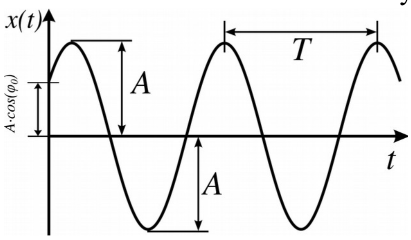
enrique@fiquipedia.es Revisado 2 agosto 2016

Estos pretenden ser unos apuntes de resumen solamente de teoría, ver ejercicios en www.fiquipedia.es.
Se trata el movimiento oscilatorio, que en 1º Bachillerato LOMCE se implanta en el curso 2015-2016, cubriendo contenidos, y a veces citando criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.
Antes LOMCE se trataba en 2º Bachillerato, por lo que hay ejercicios PAU asociados.
El MAS está en varios bloques de 1º Bachillerato LOMCE, “Cinemática”, “Dinámica” y “Energía”, pero se trata aquí de manera conjunta.

1. Descripción del movimiento armónico simple (MAS)

Se habla de movimiento oscilatorio, movimiento vibratorio armónico simple (MAS), oscilador armónico para referirse a un sistema cualquiera (mecánico, eléctrico, …) que una vez dejado en libertad fuera de su posición de equilibrio vuelve a ella describiendo oscilaciones sinusoidales.
Se introducen **magnitudes e ideas** de manera general aunque algunas están más asociadas a movimiento y otras a dinámica. Se reutilizan en movimiento ondulatorio.



Peppergrower, wikimedia, cc-by-sa

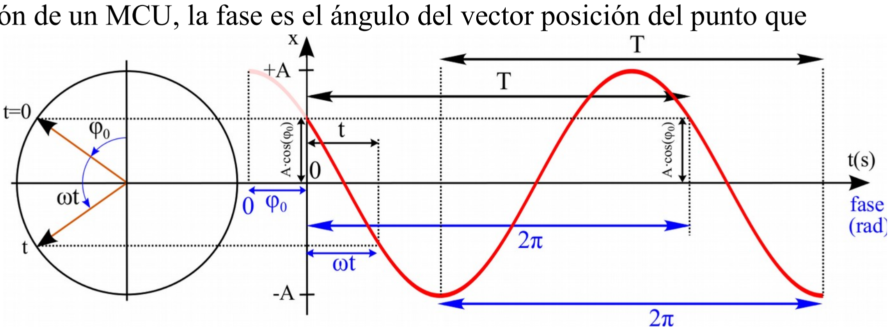
Periodo T: duración de 1 oscilación.
Frecuencia f: número de oscilaciones por segundo $f=\frac{1}{T}$
Aquí y en otros sitios se usa f y no ν (ni), para evitar confusión con v según la tipografía.
Frecuencia angular $\omega=2\pi f$
Posición de equilibrio (x=0): punto donde fuerza recuperadora es nula
Elongación x: distancia a la posición de equilibrio, posición.
Amplitud A: valor de elongación máxima
Constante elástica k. Importancia de no confundir con número de onda, habitualmente ambas k y en minúsculas; MAS se relaciona con ondas ya que un MAS es el foco emisor de una onda
Asumimos un **oscilador ideal sin pérdidas**: no hay rozamiento, y describiría un movimiento indefinido.
Visón global cualitativa: se pueden razonar posiciones en las que v, a, F, E_c y E_p es máxima y mínima.
Por defecto siempre unidades del SI: x y A en m, t y T en s, f en Hz ó s^{-1}, ω en rad/s, φ en rad, v en m/s, a en m/s^2, F en N, k en N/m, E en J.

2. Cinemática. Posición, velocidad y aceleración

Se puede y se suele introducir movimiento oscilatorio como la proyección de un movimiento circular uniforme (MCU) y así obtener las expresiones, pero no es obligatorio. Sí es útil ya que los conceptos de f, T, frecuencia angular ya se suelen conocer asociados al MCU. El hecho que realmente define un MAS es la aceleración proporcional a la elongación.
Posición $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ La elección de coseno y la fase inicial φ_0 se tratan más adelante.
Velocidad, en función del tiempo $v(t)=-A\omega\, sen(\omega t+\varphi_0)$ y de la elongación $v=\pm\omega\sqrt{(A^2-x^2)}$
Aceleración, en función del tiempo $a(t)=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$ y de la elongación $a(x)=-\omega^2 x$
En estas ecuaciones del MAS aparecen parámetros, asociados al magnitudes MAS, con significado físico

2.1 Fase, fase inicial, desfase, uso de coseno ó seno

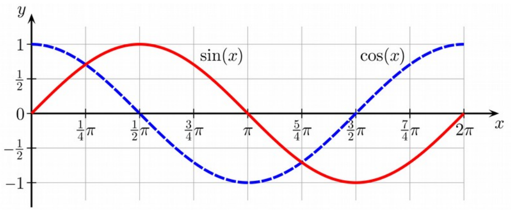
Se llama **fase** a todo el argumento de la función trigonométrica, seno o coseno. Por ejemplo en $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ la fase es "$\omega t+\varphi_0$", y se mide en radianes en el SI. **Fase inicial** es el valor de fase para condiciones iniciales; en movimiento oscilatorio la situación inicial es t=0, y "$\omega t+\varphi_0$" pasa a ser "φ_0"
La fase inicial es la que determina la elongación cuando t=0 (ver figura donde $x(t=0)=A\cos(\varphi_0)$), y también determinará la velocidad y la aceleración en t=0.
Viendo el MAS como la proyección de un MCU, la fase es el ángulo del vector posición del punto que describe el MCU, y la fase inicial está asociado al ángulo inicial. Se incluye representada proyección con coseno (si $\varphi_0=0$ se tiene $x(t=0)=A$, y para $0º<\varphi_0<90º$ el coseno decrece), si se hubiera representado con seno, se tendría que para $\varphi_0=0$ se tiene $x(t=0)=0$, y para $0º<\varphi_0<90º$ el seno crece.



Se habla de **desfase** para hacer referencia la diferencia de fase entre dos MAS con misma A y ω.
La función sinusoidal a elegir es arbitraria, cos ó sen: aquí se usa coseno para la posición. La diferencia entre ambas es un desfase.

cos(α)=sen(α +π/2) **sen(α)=cos(α -π/2)**

Ambas funciones son periódicas y tienen la misma forma: el seno está retrasado en fase respecto a coseno; si se le añade π/2 al argumento (fase) del seno, pasa a ser la función coseno. En alguna situación puede interesar usar seno o coseno para hacer que $\varphi_0=0$, lo que simplifica la expresión, pero no es obligatorio realizarlo. Tener $\varphi_0=0$ supone que, si has elegido función coseno, tienes en la situación inicial elongación es +A, y si has elegido función seno, tienes en la situación inicial que la elongación es nula.



Geek3, wikipedia, cc-by

Importante a nivel práctico: las funciones trigonométricas seno y coseno son periódicas, y pasan varias veces por el mismo valor, pero por ejemplo con la calculadora arccos(0) da un único valor, π/2 rad, aunque son infinitos valores, en concreto dos dentro del mismo periodo: π/2 y 3π/2. Cuando hay dos valores y hay que elegir la fase inicial entre esos dos, para hacerlo hay que usar algo de información adicional, y lo típico es usar el signo de la velocidad en cierto instante; al poner los dos posibles valores en la ecuación de velocidad tendremos para uno un valor positivo y para otro otro negativo, lo que nos permite elegir cual de los dos es el que cumple la condición dada. ***Fase en radianes! OJO a calculadora en grados ó radianes***

3. Fuerzas elásticas. Dinámica del MAS

Lo esencial es ver que el MAS está originado por una **fuerza recuperadora**: fuerza conservativa que siempre tiende a llevar el cuerpo a la posición de equilibrio (por eso tiene un signo menos). Está asociada a la k, constante elástica. Se suele asociar a muelles y la ley de Hooke, pero hay más casos.

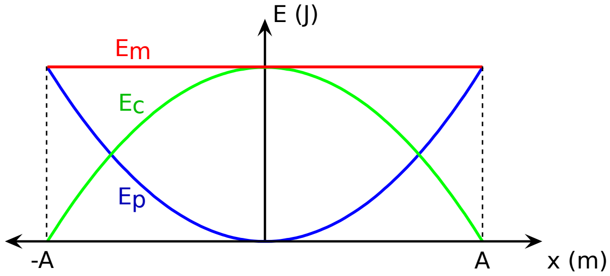
$$F=-k\,x\,;\,F=m\,a \qquad k=m\omega^2$$

4. Energía cinética y potencial del MAS

$$E_c=\frac{1}{2}k\left(A^2-x^2\right)=\frac{1}{2}k\,A^2\,sen^2(\omega t+\varphi_0);$$

$$E_p=\frac{1}{2}k\,x^2=\frac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\omega t+\varphi_0);$$

$$E_m=E_c+E_p=E_{c\,máx}=E_{p\,máx}=\frac{1}{2}k\,A^2$$



jfmelero, wikimedia, cc-by

Oscilador ideal, no hay pérdidas, se conserva la energía total mecánica, (la fuerza recuperadora es conservativa) y se produce un intercambio entre E_c y E_p.

Es interesante visualizar la representación de E_c, E_p y E_m frente a x. E_c tiene nulos en x=±A y máximo en x=0. E_p tiene nulo en x=0 y máximos en x=±A. E_m es constante.

5. Ejemplos de oscilaciones

5.1 Oscilaciones de un muelle/resorte

Lo habitual es plantear un muelle unido a una masa en su extremo y fijo por el otro sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En este caso la elongación es la posición del extremo del muelle.
Además de la idealización de no haber rozamiento, se considera que el muelle no tiene masa y masa puntual.

5.1.1 Masa en muelle/resorte vertical

En muchos casos se utiliza la situación de muelle vertical para dar indirectamente la k del muelle, a partir de la masa del cuerpo y cuanto varía de longitud al colgar la masa.

$$m\,g=k\,l\,;\,k=\frac{m\,g}{l}$$

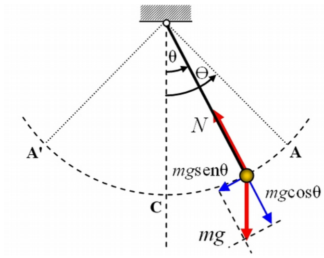
Como muchos problemas se plantean con un muelle en horizontal sobre una superficie sin rozamiento, y en la posición de equilibrio no hay ninguna fuerza neta sobre el muelle, a veces surge la duda de si una masa colgada oscila respecto a la posición de equilibrio describiendo un MAS, ya que parece que hay una fuerza no nula actuando que es el peso, parece que "no oscila desde la posición de equilibrio del muelle" y parece ser un caso distinto. Realmente sí describe un MAS: existe una posición de equilibrio (la fuerza resultante es nula, ya que peso y fuerza elástica se anulan), y la fuerza sigue siendo proporcional a la elongación respecto a ese equilibrio (el comportamiento del muelle sigue considerándose ideal y sería $F=-k(l-l_0)$, siendo $x=l-l_0$ la elongación a considerar en este caso y precisamente $kl_0=mg$, ya que se asume g constante en la oscilación).
Nota: sobre un plano inclinado sin rozamiento sería similar, pero el "peso" que estira el muelle es solamente componente x, en este caso la fuerza en la posición de equilibrio también es nula ya que $kl_0=mg\,sen\theta$.

5.1.2 Determinar experimentalmente k de un resorte aplicando la ley de Hooke

Se puede hacer de manera estática (medir F y Δx) y de manera dinámica (medir m y ω)

enrique@fiquipedia.es

5.2 Péndulo simple



Algarabia, wikimedia, public domain

Idealización en que una masa puntual cuelga de un hilo inextensible y sin masa.
La masa describe un arco de circunferencia con dos fuerzas: peso y tensión.

Con un planteamiento dinámico, se llega a ecuación $L\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\,sen\,\theta$

Con la aproximación θ = sen θ (1% error para ángulos menores 14º) se llega a la expresión de un MAS (en función θ) donde $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$ y $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ El periodo no depende de la masa colgada.
Se puede expresar en función x, distancia horizontal al eje vertical de equilibrio, con la aproximación θ=x/L

La constante elástica del MAS queda con la expresión $k=\frac{m\,g}{L}$

5.2.1 Estimar el valor de la gravedad con un péndulo simple

Se mide L y se mide T, y a partir de ellos se obtiene g $g=4\pi^2\frac{L}{T^2}$

Experimentalmente para minimizar el error no se mide directamente T, sino que se miden varias oscilaciones T_{total}=n·T, comprando de que el péndulo es aproximadamente ideal y las oscilaciones no se amortiguan, con lo que T≈T_{total}/n. Se puede repetir con varios valores de L.

6. Anexos / temas para profundizar

6.1 Otros ejemplos

Como no todo son muelles y péndulos, se comentan otros ejemplos de MAS / osciladores armónicos.
-Si realizamos un agujero rectilíneo que atraviese Tierra pasando por su centro, y dejásemos caer un objeto por él sin rozamiento, realizaría un MAS. Se puede trabajar este ejemplo en 2º de Bachillerato una vez vista la parte de gravitación. Si no pasa por el centro también es MAS (similar a plano inclinado y muelle).
-Cuerpo en equilibrio flotando que se sumerge distancia A y se deja libre.
-Si colocamos una bola en una botella de modo que la cierre herméticamente, y la desplazamos respecto de su posición de equilibrio, realizará un MAS. Al bajar la bola aumenta la presión en el interior, y al subir la bola disminuye la presión en el interior, por lo que se ve la idea de fuerza recuperadora que la lleva hacia el equilibrio. (Más información: método de Rüchardt y de Rinkel para medir coeficiente adiabático de un gas)
-Circuito LC sin pérdidas. Si conectamos un condensador cargado a una bobina, el condensador empezará a descargarse a través de la bobina; la tensión disminuye y la corriente aumenta. Se llega a una expresión similar a un MAS $L\frac{d^2V}{dt^2}=\frac{-1}{C}V$ donde V equivale a posición, L equivalente a masa, y 1/C equivale a la constante elástica, teniendo como solución $V=V_0\cos(\omega t+\varphi)$ con $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Otras: resorte espiral (relojes), movimiento ideal de una carga eléctrica cerca de ciertas distribuciones de carga, una esfera rodando sin rozamiento en el interior de una semicircunferencia, ciertas manchas solares ...

6.2 Oscilaciones no ideales

Para ampliar, aunque queda fuera de Bachillerato, se puede introducir la idea de oscilaciones amortiguadas (sobreamortiguado, amortiguamiento crítico, amortiguamiento débil) y forzadas, introduciendo el concepto de factor de calidad Q y de resonancia.
>La resonancia se comenta en el bloque de ondas de 2º de Bachillerato LOMCE