



Estos pretenden ser unos apuntes de resumen solamente de teoría, ver ejercicios en www.fiquipedia.es. Se trata el bloque de 2º Bachillerato LOMCE “Interacción gravitatoria” que se implanta en el curso 2016-2017, cubriendo contenidos, y a veces citando criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables. Antes LOMCE lo relativo a “leyes de Kepler, Fuerzas centrales, Momento de una fuerza y momento angular, Conservación del momento angular” y “Sistemas conservativos” se trataba en 2º Bachillerato, por lo que hay ejercicios PAU asociados. Lo anterior, ahora en 1º, se asume conocido y no se incluye aquí de nuevo.

1. Energía en interacción gravitatoria

Se plantea tratar primero la parte energética y luego campo (asumido no conocido), asociando luego ambas.

1.1 Fuerzas y sistemas conservativos. Campos de fuerza conservativos

Los conceptos de Fuerza, Trabajo, Energía y Energía Cinética (E_c) son previos a 2º Bachillerato y deben ser conocidos, no se repasan aquí. La E_p y E_m también han sido tratados aunque aquí se repasan y profundizan. Nota: aunque sea obvio, recordar que los incrementos Δ siempre son “valor final menos valor inicial”

Se puede definir un sistema conservativo como aquel en el que todas las fuerzas son conservativas, y son sistemas especialmente útiles ya que hay una magnitud física que se conserva, que es la energía mecánica, se puede definir una E_p , y se puede hablar de campos de fuerza conservativa (campo se ve más adelante) Los conceptos de fuerza conservativa y E_p están muy relacionados, al hablar de uno se suele citar el otro, y se pueden tratar al tiempo. Aquí se introducen primero las fuerzas conservativas para luego introducir la E_p . Se plantean varias definiciones de fuerzas conservativas:

1. Conservan la capacidad de que un cuerpo realice trabajo asociado a su estado de movimiento (que la energía cinética del cuerpo se convierta totalmente en trabajo) ya que las fuerzas conservativas aplicadas sobre un cuerpo no varían la E_c del cuerpo si no varía su posición y el desplazamiento total es cero. Si las fuerzas son conservativas, usando el teorema de las fuerzas vivas, $W_{FC} = \Delta E_c$; un trabajo de las fuerzas conservativas implica una variación del mismo signo de energía cinética.
2. El trabajo realizado en trayectoria cerrada es nulo. Implica que en una trayectoria cerrada $W_{FC} = -\Delta E_p = 0$
3. El trabajo realizado entre dos puntos no depende de la trayectoria, solamente de los puntos inicial y final.
4. Existe una función escalar, potencial, tal que el campo es el gradiente de esa función cambiado de signo.

> Para entender mejor qué son fuerzas conservativas se pueden comparar con un ejemplo típico y entendible intuitivamente de fuerzas no conservativas, que son las fuerzas de rozamiento. Usamos como ejemplo una fuerza conservativa de módulo, dirección y sentido constante, y cuyo sentido coincida con el eje x , y como desplazamiento llevar un cuerpo sobre el eje x desde el origen hasta un punto y luego de regreso al origen (el ejemplo podría ser la fuerza de la gravedad y un bloque que sube y baja por una pared con rozamiento) -Al ir y regresar el W_{FC} será nulo (en la ida tendrá un signo y en la vuelta el opuesto por ser desplazamiento con sentido opuesto) y el cuerpo regresará al origen con la misma E_c : W_{FC} y ΔE_c tienen mismo signo.

-Al ir y regresar el $W_{Frozamiento}$ será negativo en ambos casos (fuerza opuesta al desplazamiento), por lo que el cuerpo regresará al origen con menos E_c , que ha perdido: W_{FNC} y ΔE_c tienen signos opuestos.

1.2 Energía potencial

Cualitativamente es la energía asociada a que un cuerpo se encuentre en cierta posición donde existen fuerzas conservativas. Sólo en el caso de fuerzas conservativas se puede definir energía potencial (Se usa U ó E_p), y también el potencial (se ve luego asociado a campo). Se plantean varias definiciones de Energía potencial:

1. Medida de la cantidad de energía almacenada en sistema que puede recuperarse totalmente como E_c regresando a la posición inicial, en caso de que no haya pérdidas / rozamiento / fuerzas no conservativas.
2. Medida de la cantidad de energía que se puede almacenar totalmente en un sistema a partir E_c llevándolo a cierta posición
3. Matemática ΔE_p entre A y $B = E_p(B) - E_p(A) = -W_{A \rightarrow B}$ realizado por las fuerzas conservativas
4. $E_{potencial}$ como “E almacenada que **potencialmente** se puede convertir en otro tipo de energía”, viéndolo como $E_{almacenada} = -W_{realizado}$, lo que solamente ocurre con el trabajo realizado con fuerzas conservativas.

La gran ventaja de la energía potencial es que es un escalar, y para calcular trabajo para ir de un punto a otro en lugar de una integral con vectores usamos una resta de escalares.

Se miden diferencias de E_p entre 2 puntos: para asignar un valor de E_p en un punto debemos asignar valor 0 a un punto concreto que se toma como referencia.

$$W = \int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U \text{ (se usa } U \text{ ó } E_p)$$

La energía potencial no tiene una expresión general como la E_c , depende tipo fuerza conservativa asociada.

1.3 Energía mecánica

$E_m = E_c + E_p$ Puede haber energías potenciales de varios tipos al tiempo, como gravitatoria y elástica.





Como por el teorema de las fuerzas vivas $W = \Delta E_c$ y como por definición $W = -\Delta E_p$, si todas las fuerzas son conservativas $W = \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow \Delta(E_c + E_p) = \Delta E_m = 0$

Se cita como Teorema de conservación de la Energía Mecánica: Si las fuerza son conservativas $\Delta E_m = 0$

1.4 Energía potencial gravitatoria

Lo planteamos para 2 partículas; qué E_p tiene una partícula respecto a otra

Tomamos como referencia las posiciones infinitamente alejadas a las que asignamos $U(\infty) = E_p(\infty) = 0$

Con ese criterio, podemos plantear una expresión para la E_p en un punto (la deducción aparte):

$$U(r) = E_p(r) = -G \frac{Mm}{r} \quad \Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Con $E_p = 0$ en ∞ , $E_p(r) = E_p(r) - E_p(\infty) = \Delta E_p$ entre ∞ y $r = -W_{\infty \rightarrow r} = W_{r \rightarrow \infty}$; la E_p en un punto es:

-El trabajo realizado contra el campo para traer una partícula desde el infinito a ese punto.

-El trabajo realizado por el campo para llevar una partícula desde ese punto al infinito.

Nota: deducimos expresión, teniendo en cuenta que para eliminar vectores de fuerza y desplazamiento, hay que realizar su producto escalar, e interviene un signo según el sentido de la fuerza. Si la integral es desde ∞ a r , fuerza tiene sentido opuesto a $\vec{dr} = dr \vec{u}_r$, por lo que el coseno introduce un signo negativo.

$$E_p(r) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \left| -G \frac{Mm}{r^2} \right| |dr| (-1) = \int_{\infty}^r G \frac{Mm}{r^2} dr = \left[\frac{-GMm}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{-GMm}{r}$$

Se ve que en el caso gravitatorio la E_p siempre es negativa: el trabajo (para traer la partícula desde la referencia en ∞) siempre es positivo porque lo hace el campo, y se le cambia el signo (por ser $W = -\Delta E_p$)

En el caso gravitatorio se puede ver como se tiende a energías menores, diferencias E_p negativa.

Nota: para más partículas se usa principio de superposición, sumar las E_p tomadas de dos en dos.

1.5 Signos de Trabajo y Energía potencial

Cualitativamente se pueden interpretar los signos de las variaciones de E_p (también con los signos de la propia E_p que son variaciones respecto a la referencia tomada). Se detalla más al tratar el concepto de **campo** gravitatorio, y de nuevo al tratar campo eléctrico, donde signo depende de más cosas que en gravitación.

Nota: en termodinámica IUPAC fija mismo criterio de signos que en mecánica: el trabajo aportado a un sistema es positivo (el sistema gana energía) y el trabajo realizado por el sistema es negativo (el sistema pierde energía). ¿Qué es el sistema sobre el que actúa el campo? La partícula bajo la acción del campo.

Si el campo lo realiza, W es positivo: le aportaría E_c a la partícula (perdiendo E_p , ejemplo piedra que cae).

Si el trabajo se realiza externamente contra el campo, es negativo: le restaría E_c a la partícula (aumentando su E_p , podemos pensar en un lanzamiento vertical de una piedra). Se puede resumir en dos líneas:

- ΔE_p positiva, W (realizado por campo) negativo, el trabajo se realiza externamente contra el campo
- ΔE_p negativa, W (realizado por campo) positivo, el trabajo lo realiza el campo

1.6 Energía potencial gravitatoria terrestre

Estamos acostumbrados a ver la expresión $E_p = mgh$; se trata de una aproximación para alturas pequeñas.

$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = mgh$ Donde $g = GM/R_T^2$ y $h \ll R_T$, para poder aproximar $h/R_T \approx 0$, siendo h la diferencia de altura entre B y A, con lo que si A el punto más bajo/B es el más alto, h y ΔE_p son positivas.

La expresión da diferencias de E_p , y toma referencia en punto distinto de ∞ , que es el punto elegido con $h=0$, y por eso sí es posible que existan energías potenciales positivas.

>La demostración de la expresión como aproximación y su rango de validez se incluye como anexo

>Par campo constante, se puede ver la analogía entre la expresión gravitatoria $\Delta E_p = mgh$ y la expresión electrostática $\Delta E_p = qEd$

1.7 Relación entre energía y movimiento orbital. Movimiento orbital de diferentes cuerpos como satélites, planetas y galaxias

Comentario para tener cuidado en problemas, porque es muy habitual que enunciado proporcione o pida una cosa de manera concreta y lleve a confusión, siendo fuentes habituales de erratas en la resolución. Aunque puedan parecer temas triviales, los despistes son tan habituales como la variabilidad de combinaciones en los enunciados: Unidades distancia (km o m), Diámetro frente a radio, Radio de órbita frente a radio de superficie planeta, radio de la órbita frente a la altura de órbita sobre superficie planeta: $R_{\text{órbita}} = R_{\text{superficie}} + h$

1.7.1 Periodo de revolución y velocidad orbital de un cuerpo

Para el caso de órbita estable circular, podemos plantear de manera análoga a la 3ª ley de Kepler





$$F_c = F_g \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R_o}}; \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R_o}; T = 2\pi \sqrt{\frac{R_o^3}{GM}}$$

1.7.2 Determinar masa de cuerpos celestes

La tercera ley de Kepler permite resolver problemas donde conocidos dos elementos de los tres relacionados se puede determinar el tercero (período del objeto que orbita, radio de su órbita, masa del objeto central)

1.7.3 Energía y velocidad de lanzamiento y velocidad de escape

Aplicamos la conservación de la Energía mecánica; igualamos Energía mecánica en los dos puntos, para alcanzar altura h (en el punto más alto $E_c=0$)

$$v_L = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)}$$

El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería **tener** un cuerpo a una distancia R, con la dirección adecuada, para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas (también se puede ver como un lanzamiento con $h=\infty$)

$$E_e = G \frac{Mm}{R} \quad v_e = \sqrt{2G \frac{M}{R}} \quad \text{En el caso de la Tierra y en superficie: } v_e = \sqrt{2g_0 R_T} = 11,2 \text{ km/s}$$

>A veces surge la duda: los lanzamientos de cohetes no se hacen a esa velocidad, sino a velocidades mucho menores ¿cómo es posible? Hay que tener claro que la velocidad de lanzamiento y de escape es la velocidad que habría que tener inicialmente, sin impulso adicional. En un lanzamiento real, el cohete tiene unos motores que van aportando energía cinética durante la subida, no toda se tiene inicialmente.

1.7.4 Energía y órbitas

En órbita estable circular podemos igualar F_c y F_g , obtener la velocidad y llegar a expresiones de E_c y E_m :

$$E_c = \frac{|E_p|}{2} = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{R_o} \quad \text{La mitad en valor absoluto que la } E_p, \text{ y siempre es positiva.}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -E_c = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{R_o} = -\frac{1}{2} m v_o^2 \quad \text{La mitad en valor que la } E_p, \text{ y siempre es negativa.}$$

La expresión E_m válida para órbitas elípticas si R se sustituye por el semieje mayor de la elipse.

En una órbita circular la E_c es constante, pero no en una órbita elíptica, aunque sí que es constante la E_m , ya que solamente hay fuerzas conservativas y podemos aplicar la conservación de la Energía mecánica.

Energía en el cambio de órbita: diferencia de las Energías mecánicas en cada una de las órbitas (al cambiar la órbita no solamente cambia la E_p , también la E_c al cambiar la v necesaria para órbita estable).

Energía y velocidad de satelización: energía a aportar a un cuerpo a una distancia R para ponerlo en órbita a distancia R_o . La diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones.

$$E_s = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R_o} \right) \quad v_s = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R_o} \right)} \quad \text{Si } R=R_o; \quad E_s = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{R} \quad v_s = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{2} v_e$$

Nota: se suele considerar $R=R_T$, con E_c nula en la rampa de lanzamiento, al tiempo que la velocidad en órbita se calcula respecto a un sistema de referencia en el centro de la Tierra. Respecto a ese sistema la superficie de la Tierra y los objetos que están en ella tienen movimiento y cierta E_c . La energía de satelización si el planeta no gira sobre su eje es distinta a si el planeta sí gira (en el límite, si el planeta girase muy deprisa sobre su eje, podría haber una energía de satelización muy pequeña).

*Se puede hacer un comentario similar con la energía de escape: no es lo mismo energía de escape desde un cuerpo que rota que desde un objeto en órbita, porque ya tiene cierta energía cinética: la energía de escape depende del movimiento del cuerpo en la situación inicial. Sin embargo la velocidad de escape no depende de ese movimiento: la velocidad de escape es la velocidad que hay que **tener** para escapar, no la velocidad que "hay que añadir" para escapar, y por eso la expresión de la velocidad de escape es fija (de hecho tiene un nombre que es "segunda velocidad cósmica"). La energía de escape no se da en una dirección concreta porque la energía es un escalar, se calculan energías y diferencias. El calculo de velocidad de escape es posterior a partir de las energías, y la dirección y trayectorias es otro tema (se cita en anexos).*

Velocidad de escape como velocidad a tener para escapar y como velocidad a añadir para escapar coinciden si el punto inicial es la superficie, pero no en otros puntos.

1.7.5 Satélites artificiales, características de sus órbitas

Importancia de los satélites artificiales de comunicaciones, GPS y meteorológicos.

Una característica importante es el tipo de órbita: elíptica o circular, y la inclinación del plano de la órbita respecto a la Tierra. Otra característica, pensando en órbitas circulares, es la velocidad y radio la órbita es de radio menor, la velocidad será mayor.





Clasificándolos por altura se habla de satélites de:

Órbita baja (LEO): (Low Earth Orbit) $R \approx 250-1000$ km, $v \approx 7$ km/s, resistencia atmosférica, facilidad puesta en órbita, poco tiempo visibles, requieren constelación numerosa si se quiere cobertura global o de seguimiento, Doppler. Ejemplos: ISS (380 km), Hubble (600 km), observación terrestre NOAA (840 km), comunicaciones GlobalStar (1400 km)

Órbita media (MEO): (Medium Earth Orbit) $R \approx 10000-30000$ km, $v \approx 3-7$ km/s, radiación cinturones Van Allen, dificultad puesta en órbita (varias etapas), Doppler. Ejemplos: navegación (GPS, Glonass, Galileo).

Órbita geoestacionaria (GEO): (Geostationary Earth Orbit). $R \approx 36000$ km, $v \approx 3$ km/s, situados en el plano ecuatorial, órbita circular “cinturón GEO / de Clarke”, $T=24$ h. Alto coste lanzamiento, poco Doppler, cobertura en zonas de mucha latitud.

2. Campo gravitatorio

2.1 La acción a distancia y el concepto físico de campo

Concepto esencial en física introducido para explicar la acción a distancia, considerando que una fuente crea una perturbación en el espacio que asigna a cada punto del espacio un valor de una magnitud física, como puede ser una fuerza, por lo que se habla de campo vectorial o de fuerzas. Vemos campo clásico: instantáneo. La interacción es en 2 pasos: primero fuente crea el campo, y luego el campo el que interacciona con cuerpo. En el caso habitual de **campos de fuerzas** (como va a ser el campo gravitatorio), se usa el concepto de **líneas de campo**: son líneas representadas de forma que indican el vector campo; dirección es tangente a ellas, sentido mediante flechas en las líneas, y módulo mediante densidad de líneas; el número de líneas por unidad de superficie es proporcional al campo.

Simulación interesante <http://www.falstad.com/vector3d/index.html>

2.2 Campos de fuerza conservativos

Son campos asociados a fuerzas conservativas, para los que se puede definir una Energía Potencial y Potencial, que al igual que el campo de fuerza asigna una magnitud vectorial (el vector fuerza y el vector campo) a cada punto del espacio, asigna un escalar (energía potencial y potencial) en cada punto del espacio,

2.3 Campo gravitatorio. Campo gravitatorio terrestre

El campo gravitatorio es el creado por una masa que interacciona con las masas presentes en él generando fuerzas. El campo gravitatorio terrestre es el generado por la Tierra: externamente se puede considerar generado por una masa puntual con el total de la masa Terrestre situada en su centro. Su valor promedio en módulo en superficie se denomina g (comentado al ver energía potencial gravitatoria terrestre).

Vectorialmente tiene dirección radial y sentido dirigido hacia el centro de la Tierra.

2.4 Intensidad del campo gravitatorio

Un vector asociado a cada punto del espacio, nos permite obtener la fuerza gravitatoria asociada a una masa. Se puede ver como la “fuerza por unidad de masa”: la fuerza gravitatoria depende de la masa sobre la que se realiza la fuerza, pero la intensidad de campo gravitatorio solamente depende de la masa que genera el campo. Para calcular el campo generado por varias masas, al igual que en el caso de calcular la fuerza asociada a varias masas se utiliza el principio de superposición.

$$\vec{E}_g = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r; \text{ Unidades } N/kg \text{ ó } m/s^2 \quad \text{Se suele usar letra } g \quad \vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \quad \vec{F} = \vec{E}_g \cdot m$$

En la superficie de la Tierra, usando su $R_T=6370$ km y $M_T=5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $|g|=9,8$ m/s², aunque su valor exacto depende del punto, ya que no es una esfera perfecta ni es homogénea con densidad uniforme.

2.5 Potencial gravitatorio

Un escalar para cada punto del espacio. Al unir puntos de mismo valor se tienen superficies equipotenciales.

$$V(\infty)=0 \rightarrow V_A = \frac{W_A}{m} = \frac{U_A}{m} = -G \frac{M}{r_A} [J/kg]$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = \frac{W_{AB}}{m} = -GM \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad \text{Típico representar } E_p \text{ ó } V \text{ frente a } r.$$

2.6 Gradiente: relación intensidad de campo y potencial del campo gravitatorio

$grad V = \frac{\partial V}{\partial r} = -\vec{E}_g$ Gradiente del potencial (un escalar) es un vector, perpendicular a las superficies equipotenciales, tiene dirección de las líneas de campo pero sentido contrario al campo. Indica la dirección en la que el campo cambia más rápidamente.

3. Anexos/temas para profundizar

3.1 Demostración de la aproximación $E_p=mgh$ y rango de validez





Si tomamos $r_A=R_T$ y $r_B=R_T+h$, y $h \ll R_T \rightarrow R_T h \ll R_T^2$, podemos plantear

$$\Delta E_p = G \frac{Mm}{r_B} - G \frac{Mm}{r_A} = G Mm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h} \right) = m G M \left(\frac{h}{R_T^2 + R_T h} \right) \approx m G \frac{M}{R_T} h = mgh$$

Miramos para qué valor de h el error cometido es el 1%

$$Error_{relativo} = \frac{Error_{absoluto}}{Valor_{real}} \cdot 100 \Rightarrow 0,01 = \frac{\frac{GMmh}{R_T} \left(\frac{1}{R_T+h} - \frac{1}{R_T} \right)}{\frac{GMmh}{R_T} \cdot \frac{1}{R_T+h}} = \frac{h \cdot (R_T+h)}{R_T^2 + R_T h} = \frac{h^2 + R_T h}{R_T^2 + R_T h}$$

$$0,01 R_T^2 + 0,01 R_T h = h^2 + R_T h \Rightarrow h^2 + 0,99 R_T h - 0,01 R_T^2 = 0$$

Resuelto de manera general $h = -R_T$ y $h = \frac{R_T}{100}$, para $R_T = 6370 \cdot 10^3 \text{ m}$, $h = 63700 \text{ m}$

3.2 Caos determinista. El problema de tres o más cuerpos

Se ha tratado solamente el [problema de dos cuerpos](#), que en mecánica clásica es reducible a un problema de un cuerpo equivalente (una masa sometida a un campo). De manera exacta hay que usar el centro de masas del sistema y la masa reducida, pero normalmente se considera un cuerpo muy masivo, se asume $M \gg m$ y que solamente un cuerpo es móvil, se tiene un sistema inercial en M. Para dos cuerpos en general se trata de un sistema resoluble, pero para [el problema de los tres cuerpos](#) (o más) no es resoluble en general, hay una interacción mutua no despreciable. Esto lleva a la idea de [caos determinista](#) / teoría del caos, que se puede ver en otros contextos distintos al gravitatorio. Un resumen de ideas del caos determinista:

Propiedad sistemas	No caóticos	Caóticos
Proporcionalidad: un cambio pequeño en variables produce cambios pequeños	Sí	No: enlaza con metáfora efecto mariposa; el aleteo de una mariposa puede producir un tornado en el otro extremo de la Tierra
Aditividad/linealidad: el efecto total es la suma de efectos	Sí	No
Reproducibles/previsibles: con condiciones iniciales determinadas se reproduce resultado	Sí	No. Hay alta sensibilidad a las condiciones iniciales, es complejo reproducir exactamente ya que pequeña variación dará resultados distintos.

Una simulación interesante http://phet.colorado.edu/sims/my-solar-system/my-solar-system_es.html que permite ver que un cambio mínimo en condiciones produce un resultado totalmente distinto.

3.3 Momento angular de sistemas de partículas, Momento de inercia

Se ha tratado solamente el modelo de partícula, pero si tenemos un sistema de partículas, este tiene momento angular de traslación y rotación, llevando al concepto de momento de inercia asociado al giro del sistema sobre un eje. Inercia a mantener o modificar la rotación del sistema.

3.4 Flujo de campo gravitatorio y ley de Gauss

Aunque el concepto de flujo de campo y la ley de Gauss se ve con campo eléctrico, debido a analogía entre ley gravitación ley Coulomb, hay analogía con ley de Gauss gravitacional $\oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi G M_{INT}$

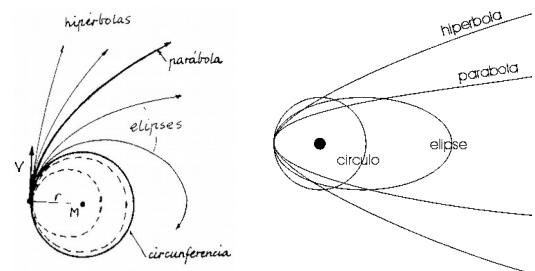
3.5 Tipos de trayectorias

Usando coordenadas polares se llega a cónica que depende de parámetros geométricos p y $e=c/a$, que pueden calcularse a partir parámetros físicos, como $|\vec{L}|$ y E. Los tipos de trayectorias son función de la E_m total objeto; E_p siempre negativa, y E_c siempre positiva: signo suma E_m indica relación valores absolutos.

-Si $E_m > 0$, ($v > v_e$, $e > 1$) escapa de campo, llegando al infinito con velocidad no nula. **Hiperbólica**.

-Si $E_m = 0$ ($E_c = |E_p|$, $v = v_e$, $e = 1$), escapa del campo, llegando al infinito sin velocidad (caso teórico, el tiempo que tardaría sería infinito). **Parabólica**. Su velocidad tiende a cero a medida que se aleja.

-Si $E_m < 0$, ($v < v_e$) el objeto queda atrapado en el campo gravitatorio. Se pueden dar 3 situaciones diferentes:



[Universidad de Sevilla](http://www.us.es/~fquijada)





- A. $\frac{-1}{2}|E_p| < E_c < |E_p|$ ($0 < e < 1$) Describe una órbita **elíptica**, aumentando la excentricidad de la elipse a medida que aumente la velocidad (energía cinética).
- B. $\frac{1}{2}|E_p| = E_c$ ($e=0$) Describe una órbita **circular**.
- C. $\frac{1}{2}|E_p| > E_c$ No describe ningún tipo de órbita y acaba colapsando contra el planeta.

3.6 Agujero negro

Un agujero negro es una **zona** con una concentración de masa lo suficientemente grande para que la velocidad de escape sea la velocidad de la luz, que es un límite físico imposible de superar, por lo que nada puede escapar de un agujero negro. Es una zona, no un punto: más lejos sí se puede escapar.

El centro de las galaxias es muy masivo y se cree que la mayoría tiene un agujero negro, que son supermasivos (millones de veces la masa del Sol). En el centro de la Vía Láctea se cree que hay un agujero negro supermasivo en Sagitario A*.

Un agujero negro implica mucha concentración de masa, no necesariamente mucha masa, ver ejercicio asociado en <http://www.fiquipedia.es/home/recursos/ejercicios/ejercicios-elaboracion-propia-fisica-2-bachillerato/ProblemaGravitacionAgujeroNegro.pdf?attredirects=0>

Existe analogía “agujero negro sónico / agujero mudo” y también se puede hablar de “agujeros negros electromagnéticos” en los que la radiación no puede escapar.

3.7 Materia oscura

Se trata de materia que no interacciona con la luz, por eso se llama oscura. Se sabe de su existencia a partir de observaciones indirectas, como datos de velocidad de rotación de galaxias como NGC 3198, comportamiento de cúmulos y estructuras a gran escala, y lentes gravitacionales (en las lentes gravitacionales hay interacción entre la materia oscura y la luz, pero esa interacción es gravitatoria, asociada a la equivalencia entre energía y masa de la luz). La materia oscura no es algo anecdótico, se trata en el bloque de cosmología: se estima que en el universo la materia “ordinaria” es solamente del orden del 5% del total, la materia oscura del orden del 27%, y el resto, un 68%, está asociado a energía oscura.

3.8 Otros temas

Para finalizar este anexo de ideas sobre las que ampliar y profundizar, se incluyen algunos temas.

- Gravitación y movimiento oscilatorio:
 - Estimar el valor de la gravedad haciendo un estudio del movimiento del péndulo simple.
 - Movimiento oscilatorio asociado a un objeto que atraviesa un planeta por un agujero rectilíneo.
- Basura espacial
- Ondas gravitacionales: son una predicción de la teoría general de la relatividad. Se detectaron por primera vez en 2015 por **LIGO** (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), y se presentó al público en febrero de 2016. Su existencia había sido confirmada en 1974 por la variación del periodo de un pulsar en un sistema estelar binario PSR B1913+16 por Hulse y Taylor, por lo que recibieron el Nobel de Física en 1994.
- Perturbación órbitas; permitió anticipar la existencia de Neptuno, calculando su órbita y encontrándolo en 1846 donde los cálculos indicaban que debía estar.
- Asistencia gravitacional. Buena explicación en <http://eltamiz.com/2010/01/28/el-sistema-solar-asistencia-gravitatoria/>
- Órbita de transferencia de Hohmann
- Gravitación y relatividad.
- Agujeros de gusano.
- Lentes gravitacionales.
- Puntos de Lagrange

En general la gravitación enlaza con astronomía y astrofísica, donde la cantidad de temas es muy grande: energía oscura, Big Bang, radiación de fondo, expansión del universo, exoplanetas, ... se tratan en el bloque de cosmología.

Imagen interesante Pozos de gravedad <https://xkcd.com/681/>

