



Aunque las cuestiones son de tipo test y no se pide razonar la opción elegida ni se puede valorar el razonamiento realizado, en estas soluciones se intenta aportar un razonamiento breve de cómo se ha obtenido y cálculos numéricos.

Esto es un borrador donde se hacen razonamientos breves y se citan algunos diagramas, pero inicialmente hay pocos diagramas hechos, que es recomendable hacer y son útiles, y se intentarán añadir en revisiones. Las soluciones son oficiosas de la fase local de Madrid; otras comunidades sí publican soluciones oficiales a los problemas de sus fases locales. Se comenzó por la fase de 2013 y es la que concentra comentarios sobre detalles al realizar la parte experimental, que a veces se citan en otros puntos del documento, pendiente de elaborar materiales sobre esa parte experimental. Los problemas se colocan en orden cronológico inverso. La convocatoria de 2021 tiene una estructura distinta, se realizó telemáticamente.

### **Madrid 2021 (pendiente completar)**

#### **P1.**

**a)** Son dos preguntas separadas, la primera supone cálculos y en la segunda se pide explícitamente razonar sin realizar cálculos numéricos.

a) Para calcular la potencia total que consume, calculamos la resistencia equivalente y aplicamos  $P=V^2/R$ . Las resistencias roja y verde están en serie, luego equivalen a una resistencia  $R_1$  de  $10 \Omega$ .

Esta resistencia  $R_1$  está en paralelo con la resistencia azul, por lo que equivalen a una resistencia

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \Rightarrow R_2 = \frac{10}{3} \Omega$$

La resistencia  $R_2$  está en serie con la resistencia amarilla, por lo que equivalen a una resistencia  $R=5+10/3=25/3 \Omega$ .

La potencia total que consume si la tensión son  $12 \text{ V}$  será  $P=12^2/(25/3)=17.28 \text{ W}$

b) Como todas tienen la misma resistencia, el brillo lo determinará la corriente. La mayor corriente circula por la bombilla amarilla, ya que la corriente por ella es la suma de la corriente que circula por la azul más la que circula por la rama de roja+verde. Entre esas dos ramas, que están a la misma tensión, circulará más corriente por la rama de la bombilla azul, ya que su resistencia es menor que la de la rama roja+verde.

Ordenando por orden creciente de brillo como se pide: roja=verde<azul<amarilla.

**b)** Se trata de la composición de dos movimientos:

-Caballo: MRU con  $v=45,1 \text{ km/h}=12,53 \text{ m/s}$

-Flecha: tiro parabólico, composición de

--MRU en eje  $x$  con  $v_{0x}$  desconocida

--MRUA en eje  $y$  con  $v_{0y}$  desconocida, pero igual a  $v_{0y}$  al ser el ángulo de  $45^\circ$ .

El tiempo que la flecha tarde en subir y bajar. Tomando  $g=9,8 \text{ m/s}^2$ , es  $0=v_{0y}-9,8 \cdot t \rightarrow t=v_{0y}/9,8 \text{ s}$

En ese tiempo el caballo ha recorrido  $12,53 \cdot v_{0y}/9,8$

En ese tiempo la flecha ha recorrido  $v_{0x} \cdot v_{0y}/9,8$

Dado que la flecha le cae encima, ambas distancias coinciden, y las igualamos

$12,53 \cdot v_{0y}/9,8 = v_{0y}^2/9,8 \rightarrow v_{0y}=12,53 \text{ m/s}$  (se podría ver directamente de forma inicial al ser ambos MRU)

La distancia recorrida será  $12,53^2/9,8=16 \text{ m}$

**c)** Se trata de un MAS, en el que la posición central es la del equilibrio. La fuerza recuperadora está asociada al fuerza repulsiva de la esfera cargada más cercana. Como las fuerzas están en el mismo eje, planteamos con escalares con la 2ª ley de Newton, cuando está separado una distancia  $x$  de la posición central de equilibrio. Tomamos referencia  $x=0$  en posición de equilibrio, y esfera central desplaza una distancia  $x$ . La fuerza de la esfera más cercana a una distancia  $(L-x)$  tendría sentido opuesto

$$-K \frac{qq}{(L-x)^2} + K \frac{qq}{(L+x)^2} = ma \Rightarrow \frac{-(L+x)^2 + (L-x)^2}{(L^2-x^2)^2} = \frac{m}{Kq^2} a \Rightarrow \frac{-2x^2}{(L^2-x^2)^2} = \frac{m}{kq^2} a$$

Usando la aproximación del enunciado, que supone  $x \ll L$ , tenemos

$$\frac{-2x^2}{L^4} = \frac{m}{Kq^2} a \Rightarrow a = \frac{-2kq^2}{mL^4} x^2$$

Es la expresión de un MAS  $a=-\omega^2 x$ , por lo que  $\omega^2 = \frac{2Kq^2}{mL^4}$

Se pide expresión del periodo,  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^4}{2Kq^2}} = \pi \frac{L^2}{q} \sqrt{2 \frac{m}{K}}$

**d)** Para una órbita circular podemos deducir la 3ª ley de Kepler, que nos relaciona periodo con radio de órbita, igualando en la órbita fuerza centrípeta con gravitatoria. Usamos  $R$  para radio órbita



$$F_g = F_c \Rightarrow G \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow \frac{GM}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow R^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T^2$$

Para la velocidad de lanzamiento, planteamos conservación de energía entre la energía potencial en el punto de lanzamiento + la energía cinética del salto y la energía que tiene en el punto más alto, y llegamos a

$$-G \frac{Mm}{R_T} + \frac{1}{2} m v_L^2 = -G \frac{Mm}{R} \Rightarrow v_L = \sqrt{2GM \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R} \right)}$$

Por la definición de gravedad  $g_0 = \frac{GM}{R_T^2} \Rightarrow GM = g_0 R_T$

Combinando expresiones 
$$v_L = \sqrt{2 g_0 R_T \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{g_0 R_T}{4\pi^2} T^2}} \right)}$$

**e)** La primera parte del problema no utiliza la temperatura.

Podemos asumir que la lluvia supone una cantidad de líquido constante por unidad de superficie y unidad de tiempo, que podemos llamar  $k$  ( $L/m^2 \cdot s$ )

En el mismo tiempo se llegan 5 L del cubo B y 3 L del cubo A, de modo que si llamamos a este tiempo  $T$  y  $S_A$  y  $S_B$  a la superficie de cada cubo en  $m^2$ .

$$S_B \cdot T \cdot k = 5; S_A \cdot T \cdot k = 3$$

Igualando  $T \cdot k$  llegamos a  $5/S_B = 3/S_A$ , de modo que  $S_A = 3/5 \cdot S_B$

Se nos indica que el cubo A tiene una capacidad de 4 L y el cubo B de 7 L, y dado que  $V = S \cdot H$ , podemos plantear

$$4 = S_A \cdot H_A; 7 = S_B \cdot H_B$$

Se nos pide 
$$\frac{H_B}{H_A} = \frac{7/S_B}{4/S_A} = \frac{7}{4} \frac{S_A}{S_B} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{20}$$



### Madrid 2020

1. Respuesta c) 66,1 m/s. Se trata de un MRUA. La diferencia de 10 segundos es el tiempo entre pasar las dos veces por el punto a 100 m, y que se emplea el mismo tiempo en la subida y en la bajada, de modo que desde los 100 m hasta subir al punto más alto emplea 5 s y emplea otros 5 s en bajar de nuevo a los 100 m. Si planteamos la subida hasta el punto más alto  $v_{arriba} = v_{100} + at \rightarrow 0 = v_{100} - 9,81 \cdot 5 \rightarrow v_{100} = 49,05$  m/s. Ahora planteamos que esa velocidad es la asociada a un lanzamiento vertical desde el suelo hasta llegar a 100 m, de modo que  $v_{100}^2 - v_{lanz}^2 = 2as \rightarrow 49,05^2 - v_{lanz}^2 = 2 \cdot (-9,81) \cdot 100 \rightarrow v_{lanz} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 100 + 49,05^2} \approx 66,1$  m/s

2. Respuesta d) 52 N. Tomamos eje x en el sentido del movimiento. Llamamos bloque A al superior y B al inferior. Sobre el bloque B además de peso, normal (que la ejerce el suelo) y fuerza de rozamiento (que la ejerce el suelo), tenemos dos fuerzas que ejerce el bloque A como reacción a las que ejerce B: Normal y Fuerza de rozamiento que B hace sobre A.

Planteamos 2ª ley para cada bloque

A: Eje y:  $N_A = P_A$ ; Eje x:  $F_{rA} = m_A \cdot a_A$

(la fuerza de rozamiento se opone a que el bloque de arriba sea arrastrado; si no hubiese rozamiento entre bloques, deslizaría y no se movería)

B: Eje y:  $N_B = P_B + P_A$ ; Eje x:  $-F_{rB} - F_{rA} + F = m_B \cdot a_B$

No tenemos como dato coeficiente de rozamiento, pero sí los valores de aceleraciones. Asumimos que es el mismo coeficiente entre ambas superficies.

$$\mu \cdot 2 \cdot 9,81 = 2 \cdot 2 \rightarrow \mu = 0,204$$

Sustituyendo en bloque B:

$$-0,204 \cdot (8+2) \cdot 9,81 - 0,204 \cdot 2 \cdot 9,81 + F = 8 \cdot 6 \rightarrow F = 72 \text{ N}$$

El valor no es ninguno de los indicados, así que planteamos que no hubiese rozamiento con la mesa

$$-0,204 \cdot 2 \cdot 9,81 + F = 8 \cdot 6 \rightarrow F = 52 \text{ N}$$

3. Respuesta a) 3 g. Usamos el concepto de impulso.

Si la fuerza en la boca vale 200 N, el tiempo transcurrido es  $t = (200 - 800) / (-2 \cdot 10^5) = 0,003$  s

$$\Delta \vec{p} = \vec{I} \Rightarrow \vec{p}_{final} - \vec{p}_{inicial} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt$$

$$p_{final} = \int_0^{0,003} (800 - 2 \cdot 10^5 t) dt = [800 \cdot t - 10^5 t^2]_0^{0,003} = 800 \cdot 0,003 - 10^5 \cdot 0,003^2 = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p = m \cdot v \Rightarrow m = \frac{p}{v} = \frac{1,5}{500} = 0,003 \text{ kg} = 3 \text{ g}$$

4. Respuesta a) 9. Una órbita es un caso de fuerzas centrales y se conserva el momento angular medido respecto de los focos, pero se pide medido desde el foco opuesto a la Tierra.

Primero planteamos la relación de distancias usando momento angular respecto del foco.

$$L_p = L_a \Rightarrow r_p \cdot m \cdot v_p = r_a \cdot m \cdot v_a \Rightarrow r_a = \frac{v_p}{v_a} r_p = 3 r_p$$

Si ahora tomamos momento angular respecto al foco opuesto a la Tierra, la distancia que antes era de perigeo ahora será de apogeo y a la inversa.

$$\frac{L_{p'}}{L_{a'}} = \frac{r_a \cdot m \cdot v_p}{r_p \cdot m \cdot v_a} = 3 \cdot 3 = 9$$

5. Respuesta b) 0,36 s. Usando la segunda ley de Newton  $a = F/m$ , se trata de un MAS donde  $a = -k \cdot x$

$$a = \frac{-\omega^2}{m} x \Rightarrow 3 = \frac{\omega^2}{0,010} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{0,03} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{0,03}} \approx 0,36 \text{ s}$$

6. Respuesta c) 10 GJ. La expresión de la energía mecánica en una órbita circular es  $E_m = -1/2 GMm/r$ . No tenemos G y M como datos, pero sí g, y tenemos  $g = GM/R_T^2$  luego  $GM = g \cdot R_T^2$ .

En este caso  $E_m = -0,5 \cdot 9,81 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2 \cdot 500 / (6400 \cdot 10^3 + 3600 \cdot 10^3) = -10^{10} \text{ J} = -10 \text{ GJ}$

Para expulsarle de la órbita lo llevaríamos a una situación de  $E_m = 0$  (infinitamente alejada)

7. Respuesta c) 3,0 m/s. Conservación de la masa: "la masa que entra es la que sale"

$m_{entra(1)/t} = m_{sale(2)/t} \rightarrow V$  entra ó sale por unidad de  $t = v dA$ , y como  $m = V \rho$ , planteamos

$v_1 \rho_1 dA_1 = v_2 \rho_2 dA_2$ ; Incompresible:  $\rho$  cte. Integrando:  $v_1 A_1 = v_2 A_2$ ;  $Q = \text{cte}$  (Caudal constante)

$$0,75 \cdot \pi \cdot (0,10/2)^2 = v \cdot \pi \cdot (0,05/2)^2 \rightarrow v = 0,75 \cdot (0,10/0,05)^2 = 3 \text{ m/s.}$$

$$8. \text{ Respuesta d) } 32. \frac{P_{ex1}}{P_{ex2}} = \frac{I_{ex1} 4\pi r^2}{I_{ex2} 4\pi r^2} = \frac{10 \frac{-\beta_{ex1}}{10}}{10 \frac{-\beta_{ex2}}{10}} = 10 \frac{\beta_{ex2} - \beta_{ex1}}{10} = 10 \frac{110 - 95}{10} = 31,6$$

9. Respuesta d) 21 cm. Planteamos la expresión de la capacidad de una esfera para averiguar su carga



$C=4\pi\epsilon_0 R$ , y  $C=Q/V$ , luego  $Q=4\pi\epsilon_0 R \cdot V$ . Al mismo tiempo, al ser esférica su superficie es  $S=4\pi R^2$  y si llamamos  $\sigma$  a la densidad de carga superficial,  $Q=\sigma S$ . Sustituyendo  $\sigma 4\pi R^2=4\pi\epsilon_0 R \cdot V$

Numéricamente  $R=\epsilon_0 \cdot V/\sigma=(1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) \cdot 7920/(1/3 \cdot 10^{-6})=0,21 \text{ m} = 21 \text{ cm}$

**10.** Respuesta a) 40 km/s. Para que pase sin ser desviada, el módulo de las fuerzas eléctrica y magnética es el mismo, y las fuerzas tienen sentido opuesto. La eléctrica es  $q \cdot E$ , siendo  $E=V/d$  al ser uniforme entre placas. La magnética es  $q \cdot v \cdot B$ . Igualando  $q \cdot V/d=q \cdot v \cdot B \rightarrow v=V/(d \cdot B)=80/(0,01 \cdot 0,2)=4 \cdot 10^4 \text{ m/s}$

**11.** Respuesta b) 98 ms. El flujo será  $\Phi=B \cdot S \cdot \cos(\alpha)=B \cdot \pi r^2=0,01 \cdot \pi(1-10t)^2$

La fem inducida será  $\epsilon=\frac{-d\Phi}{dt}=-0,01 \cdot 2 \cdot (1-10t)(-10)=0,2\pi-2\pi t$

Si fem = 0,01 V  $\rightarrow t=(0,01-0,2\pi)/(-2\pi)=0,098 \text{ s}$

**12.** Respuesta c) +2,0 cm. Utilizamos la ecuación de espejos con  $R=+1,5 \text{ m}$ ,  $s=-50 \text{ m}$ ,  $y=1,4 \text{ m}$ .

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = \frac{2}{R} \Rightarrow s' = \frac{1}{\frac{2}{1,5} - \frac{1}{-50}} = 0,74 \text{ m} \quad A = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{-0,74}{-50} = 0,0148$$

$y'=y \cdot A=1,4 \cdot 0,0148=0,0207 \text{ m} = 2,07 \text{ cm}$

**D1.** Si el patinador B sale con 20 m/s y se encuentran en un punto situado a 10 m de A, está a 25 m de B ya que la distancia AB son 35 m. Eso supone el tiempo que tarda B hasta la colisión es  $25/20=1,25 \text{ s}$ , y es el mismo tiempo que tarda A, ya que salen simultáneamente, por lo que su velocidad es  $10/1,25=8 \text{ m/s}$ .

a) Planteamos la conservación del momento lineal en la colisión. Tomamos x positivas en el sentido de B

$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = (m_A + m_B) \cdot v$$

$$80 \cdot (-8) + 60 \cdot 20 = (80 + 60) \cdot v \Rightarrow v = \frac{-640 + 1200}{140} = 4 \text{ m/s}$$

Salen juntos en el sentido del patinador B, hacia el tramo curvo de radio  $R_A$ .

b) En el tramo horizontal recorren 10 m hasta el tramo curvo frenados por la fuerza de rozamiento, con una aceleración  $-\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \rightarrow a = -0,01 \cdot 9,81 = -9,81 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$ .

La velocidad de llegada será  $v_2 - v_0^2 = 2as \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot (-9,81 \cdot 10^{-2}) \cdot 10 + 4^2} = 3,746 \text{ m/s}$

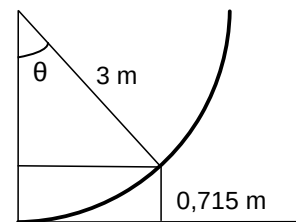
Planteando la conservación de la energía mecánica en el tramo curvo, ya que ahí no hay rozamiento, calculamos la altura.

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{3,746^2}{2 \cdot 9,81} = 0,715 \text{ m}$$

Dado que el radio de ese tramo es  $R_A=3 \text{ m}$ , podemos plantear el ángulo que formará la normal, que al ser perpendicular a la superficie, será radial.

Respecto a la vertical sería  $\theta$ , siendo  $\theta = \arccos\left(\frac{3-0,715}{3}\right) = 40,4^\circ$

Cuando los patinadores se detienen, las únicas fuerzas que actúan son la normal y el peso. En ese instante la normal tiene que compensar la componente radial del peso; la otra componente tangencial hará que, aunque 3 m la velocidad en ese instante sea cero, los patinadores aceleren hacia abajo cayendo por el tramo curvo. La componente radial del peso tendrá como módulo  $m \cdot g \cdot \cos(\theta)$ , que en este caso será  $140 \cdot 9,81 \cdot \cos(40,4^\circ) = 104,6 \text{ N}$ .



**D2.** a) Se indica trabajo realizado: asumimos realizado por el campo, de modo que  $W_{A \rightarrow B} = -q \Delta V$

Al ser el campo eléctrico uniforme y en el eje z, las superficies equipotenciales son planos perpendiculares, de modo que solo nos importa la coordenada z para calcular la diferencia de potencial.

Calculamos primero el módulo, y luego razonamos el signo de la diferencia de potencial.

$$|\Delta V| = |V(B) - V(A)| = |E \cdot \Delta x| = 20 \cdot (8 - 1) = 140 \text{ V}$$

El campo está dirigido hacia sentido negativo del eje x, por lo que va dirigido de B a A. El campo va dirigido hacia potenciales menores, por lo que en B es mayor que en A, y este caso la diferencia de potencial será positiva.

$$W_{A \rightarrow B} = -2,0 \cdot 10^{-3} \cdot 140 = -2,8 \cdot 10^{-1} \text{ J}$$

El trabajo realizado por el campo es negativo, es en contra del campo: estamos llevando una carga negativa hacia potenciales menores.

b) De nuevo tenemos en cuenta que solo interviene la coordenada z.

Entre el punto C (2, 2, 2) y A tenemos  $|\Delta V| = |V(C) - V(A)| = |E \cdot \Delta x| = 20 \cdot (2 - 1) = 20 \text{ V}$  y con el mismo razonamiento, el signo de la diferencia de potencial es positiva. Dado que  $V(C)$  es 0 V, tenemos que



$$V(A) = -20 \text{ V.}$$

Podemos plantear  $V(x, y, z) = -20 \cdot (2-z) = 40 - 20z \text{ V.}$

Si  $z=2$ ,  $V=0$ . Si  $z=1$ ,  $V=-20 \text{ V.}$  Si  $z=8$ ,  $V=120 \text{ V.}$

**D3.** a) Al ser la espira plana y campo uniforme  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha$ , y al ser campo magnético perpendicular al plano, ángulo es  $0^\circ$ . Tomamos eje  $x$  horizontal y llamamos  $x_0$  a la posición inicial de la

$$\text{varilla, } S = L \cdot x = L \cdot (x_0 + v_0 \cdot t). \quad \Phi = B \cdot S = B \cdot L \cdot (x_0 + v_0 \cdot t) \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot L \cdot v_0$$

La corriente circula en sentido antihorario: el flujo está aumentando, y según la ley de Lenz eso implica que se está generando un campo inducido opuesto al externo para disminuir el flujo.

b) Calculamos la aceleración de la varilla a partir de la aceleración: la fuerza magnética sobre la varilla, en la que la corriente circula verticalmente, aplicando la ley de Laplace  $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$  estaría dirigida hacia la izquierda en el diagrama, oponiéndose al aumento de flujo. Aplicando la 2ª ley de Newton con módulo, tendríamos  $m \cdot a = I \cdot L \cdot B$

$$\text{Aplicando la ley de Ohm (ponemos en general } v = dx/dt) \quad I = \frac{V}{R} = \frac{-BLv}{R}$$

Igualando e integrando

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{-BLv}{R} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{-BL}{mR} dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \frac{-BL}{mR} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = \frac{-BL}{mR} t \Rightarrow v = v_0 \cdot e^{\frac{-BL}{mR} t}$$

La expresión indica que en  $t=0$ ,  $v=v_0$ , y para  $t=\infty$ ,  $v=0$ .

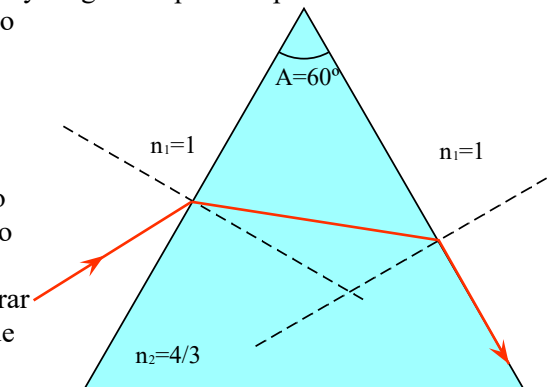
**D4.** Se reutiliza diagrama cuestión 11 fase local olimpiada 2016 y diagrama apuntes óptica física.

a) Si no sale por la cara opuesta del prisma, el ángulo refractado son  $90^\circ$ , y podemos calcular el ángulo de incidencia desde el interior del prisma.

$$\text{sen}(i_2) \cdot n_2 = \text{sen}(90^\circ) \cdot n_1 \Rightarrow i_2 = \arcsen\left(\frac{1}{4/3}\right) = 48,6^\circ$$

Si aplicamos trigonometría, en el triángulo formado por el rayo según cruza el prisma, conocemos un ángulo que es de  $60^\circ$ , otro que es  $(90-48,6)=41,4^\circ$ , por lo que el otro del triángulo es  $180-60-41,4=78,6^\circ$ , que es  $(90-r_1)$ , luego el ángulo refractado al entrar en el prisma desde el aire es  $11,4^\circ$ . Aplicando de nuevo la ley de Snell de refracción

$$\text{sen}(i_1) \cdot n_1 = \text{sen}(11,4^\circ) \cdot n_2 \Rightarrow i_1 = \arcsen\left(\text{sen}(11,4^\circ) \cdot \frac{4/3}{1}\right) = 15,3^\circ$$



b) La expresión directa para la desviación  $\delta$  (ángulo de desviación entre rayo incidente y rayo emergente) es  $\delta = i_1 + r_2 - \varphi$

Siendo  $\varphi$  = ángulo del prisma,  $r_2$  = ángulo de emergencia

Deducción de la expresión desviación:

En E:  $\delta = 180 - b$  ya que son ángulos complementarios.

En A:  $i_1 = x + r_1$  ya que son ángulos complementarios.

En B:  $r_2 = y + i_2$  ya que son ángulos complementarios.

En triángulo ABE:  $x + y + b = 180 \rightarrow \delta = x + y$  [1]

En la normal en A:  $90 = w + x + r_1$  [2]  $\rightarrow 90 = w + i_1 \rightarrow w = 90 - i_1$  [3]

En la normal en B:  $90 = i_2 + y + z$  [4]  $\rightarrow 90 = z + r_2 \rightarrow z = 90 - r_2$  [5]

En triángulo ABC:  $w + x + y + z + \varphi = 180$  [6]

Sustituyendo [1], [3] y [5] en [6]:  $90 - i_1 + \delta + 90 - r_2 + \varphi = 180 \rightarrow \delta = i_1 + r_2 - \varphi$

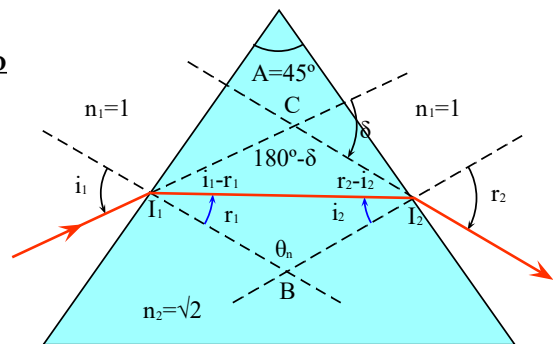
Aplicamos ley Snell para calcular  $r_2$ .

$$\text{sen}(i_1) \cdot n_1 = \text{sen}(r_1) \cdot n_2 \Rightarrow r_1 = \arcsen\left(\text{sen}(50^\circ) \cdot \frac{1}{4/3}\right) = 35,1^\circ$$

En triángulo ABC:  $60 + (90 - 35,1) + (90 - i_2) = 180 \rightarrow i_2 = 60 - 35,1 = 24,9^\circ$

$$\text{sen}(i_2) \cdot n_2 = \text{sen}(r_2) \cdot n_1 \Rightarrow r_2 = \arcsen\left(\text{sen}(24,9^\circ) \cdot \frac{4/3}{1}\right) = 34,2^\circ$$

$$\delta = i_1 + r_2 - \varphi = 50 + 34,2 - 60 = 24,2^\circ$$



**Problemas de tratamiento de datos experimentales**

## 1. Propagación de incertidumbres

### TDE1.



$$\omega = 120,0 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 4\pi \approx 12,5664 \text{ rad/s}$$

Según enunciado  $\Delta\omega = 0,5 \text{ rpm}$

$$\Delta\omega = 0,5 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \approx 0,05236 \text{ rad/s}$$

Tomamos 1 cifra significativa en el error, de modo que  $\omega = 12,56 \pm 0,05 \text{ rad/s}$

Calculamos el valor pasando a SI ( $20,0 \text{ cm} = 0,200 \text{ m}$ )

$$E_{CT} = \frac{1}{4} M R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} 0,50 \cdot 0,200^2 \cdot (4\pi)^2 \approx 7,89568352 \cdot 10^{-1} \text{ J}$$

Utilizamos propagación de errores.

$$dE = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial M} dM\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial R} dR\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \omega} d\omega\right)^2}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial M} \Delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \omega} \Delta \omega\right)^2}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{1}{4} R^2 \omega^2 \Delta M\right)^2 + \left(\frac{1}{4} M 2 R \omega^2 \Delta R\right)^2 + \left(\frac{1}{4} M R^2 2 \omega \Delta \omega\right)^2}$$

Numéricamente, usando valores en unidades SI ( $\Delta R = 0,005 \text{ m}$ )

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{1}{4} 0,200^2 (4\pi)^2 0,01\right)^2 + \left(\frac{1}{4} 0,50 \cdot 2 \cdot 0,200 (4\pi)^2 0,005\right)^2 + \left(\frac{1}{4} 0,50 \cdot 0,200^2 \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 0,05\right)^2}$$

$$\Delta E \approx 4,298 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

No podemos expresar resultado con más de 2 cifras significativas que es el peor número de cifras significativas de los datos del enunciado (0,50 kg ; 20,0 cm y 120,0 rpm), y usamos una cifra para la incertidumbre como las tres incertidumbres del enunciado (0,01 kg; 0,5 cm y 0,5 rpm).

$$E = 0,79 \pm 0,04 \text{ J}$$

## 2. Ajuste lineal

### TDE2.

a) Transformamos la expresión original  $v = At + B\sqrt{t}$  buscando una expresión lineal  $y = mx + n$

Al tener una suma de términos con la misma variable  $t$ , podemos buscar varias estrategias:

-Usar logaritmos para que la suma se convierta en producto.

Si  $\ln z = \sqrt{t}$   $v = A(\ln z)^2 + B \ln(z)$  pero no lo resolvemos, porque  $\ln z^2 = 2 \ln z$ , pero se trata de  $(\ln z)^2$

-Usar desarrollo del cuadrado de un monomio para que aparezca  $t$  en un único sitio.

$$v = A(\sqrt{t}\sqrt{t} + \frac{B}{A}\sqrt{t}) = A\left(\sqrt{t} + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A} \quad \text{Si } z = \left(\sqrt{t} + \frac{B}{2A}\right)^2 \text{ tenemos } v = Az - \frac{B^2}{4A}$$

Que es la ecuación de una recta  $y = mx + n$ , donde  $y = v$ ,  $x = z$ ,  $n = -B^2/4A$  y  $m = A$ , pero al no tener los valores de  $B$  y  $A$ , no podemos hacer una transformación de valores.

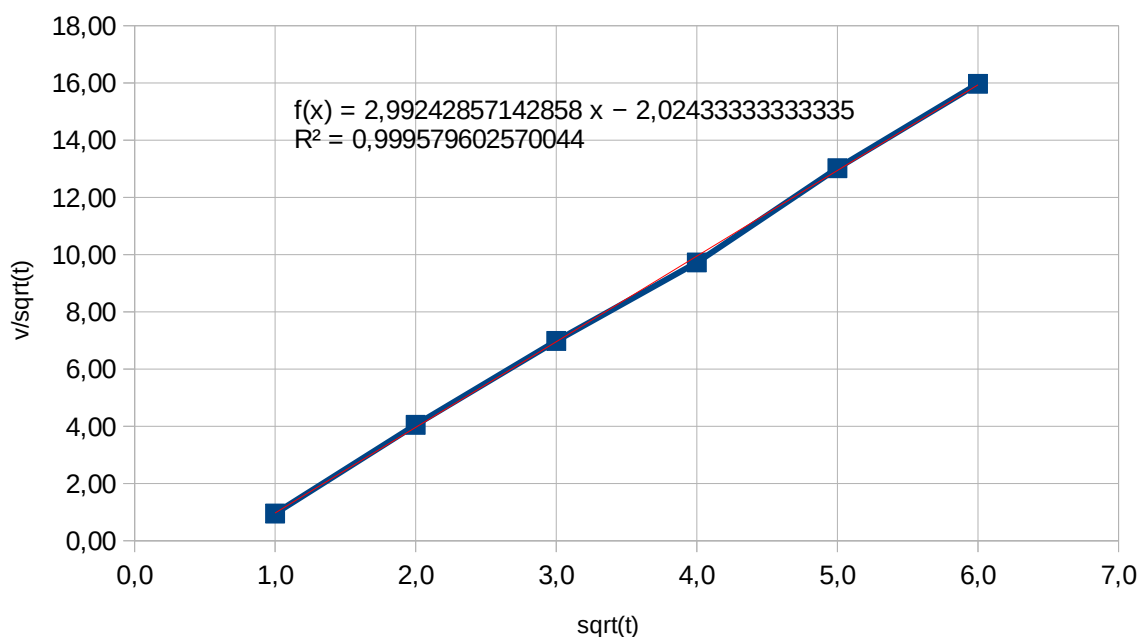
-Si definimos  $z = \sqrt{t}$  obtenemos  $v = Az^2 + B\sqrt{z}$  que permitiría una regresión polinomial, pero se pide lineal.

-Definimos  $y = \frac{v}{\sqrt{t}}$ ;  $x = \sqrt{t}$  de modo que  $y = Ax + B$

Que es la ecuación de una recta  $y = mx + n$ , donde  $m = A$  y  $n = B$

Realizamos la transformación de datos y representamos

t(s)	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	36,0
v (cm s <sup>-1</sup> )	0,95	8,10	20,95	38,90	65,10	95,80
sqrt(t)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
v/sqrt(t)	0,95	4,05	6,98	9,73	13,02	15,97



Realizamos el ajuste por mínimos cuadrados (en la gráfica con LibreOffice realizado con línea de tendencia) <https://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+%7B%7B1.0%2C0.95%7D%2C%7B2.0%2C4.05%7D%2C%7B3.0%2C6.98%7D%2C%7B4.0%2C9.73%7D%2C%7B5.0%2C13.02%7D%2C%7B6.0%2C15.97%7D%7D>

El ajuste varía ligeramente ya que en LibreOffice se utilizan los valores sin redondear

$$A = 2,9931$$

$$B = -2,026$$

Tomando 3 cifras significativas como en los datos de enunciado (realmente habría que hacerlo a partir de información de la gráfica, de las desviaciones de los puntos respecto a la recta ajustada, asociado a estimar incertidumbre) tenemos

$$A \approx 2,99$$

$$B \approx -2,03$$

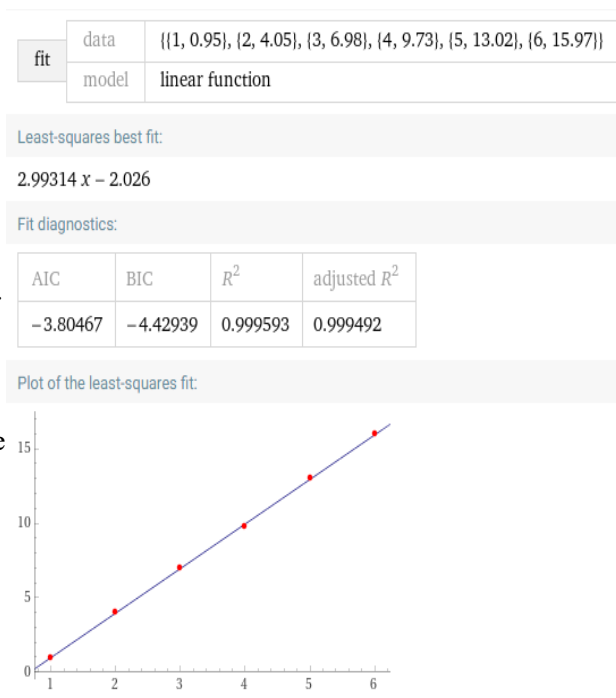
Se piden también las unidades físicas de A y B, que se pueden deducir del análisis dimensional y de las unidades utilizadas.

Como v está en cm/s y A multiplica a t en s, tenemos que las unidades de A deben ser cm/s<sup>2</sup>

Como v está en cm/s y B multiplica a raíz(t) en s, tenemos que las unidades de B deben ser cm/s<sup>3/2</sup>

$$A \approx 2,99 \text{ cm/s}^2$$

$$B \approx -2,03 \text{ cm/s}^{3/2}$$





**Madrid 2019**

1. Respuesta c) 875 m. Si quedan 500 m = 0,5 km, el tiempo que tarda la persona que va a 4 km/h en llegar a casa es de  $t=0,5/4=0,125$  h. Ese es el tiempo que ha estado yendo y viniendo el perro a 7 km/h, por lo que el espacio que ha recorrido es  $0,125 \cdot 7=0,875$  km = 875 m.

2. Respuesta b) 45,6 N. Si la inclinación es de 30%, la tangente es 0,3, y el ángulo de  $\arctan(0,3)=16,7^\circ$ . La aceleración viene determinada por la fuerza resultante paralela al plano, que es la suma de la componente paralela al plano de la fuerza aplicada (enunciado indica que fuerza aplicada es horizontal), la componente del peso horizontal al plano y el rozamiento en contra, y podemos plantear

$F_x - \mu \cdot N - P_x = m \cdot a \rightarrow$  En eje y la normal compensa componentes perpendiculares al plano de peso y F.

$$F \cdot \cos(\alpha) = (\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\alpha)) + m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + m \cdot a$$

$$F = (\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) + m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + m \cdot a) / (\cos(\alpha) - \mu \cdot \sin(\alpha))$$

$$F = (0,10 \cdot 10 \cdot 9,81 \cdot \cos(16,7^\circ) + 10 \cdot 9,81 \cdot \sin(16,7^\circ) + 10 \cdot a) / (\cos(16,7^\circ) - 0,10 \cdot \sin(16,7^\circ)) = 40,5 + 10,8 \cdot a$$

Enunciado indica "ascender 6 m" y se puede dudar si es distancia ascendida en vertical o sobre el plano

a) En vertical: para ascender 6,00 m en vertical recorre  $6,00 / \sin(16,7^\circ) = 20,9$  m

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2, \text{ siendo } v_0 = 0 \text{ y } t = 5s \rightarrow 20,9 = 0,5 \cdot a \cdot 25 \rightarrow a = 1,67 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo  $F = 40,5 + 10,8 \cdot 1,67 = 58,5$  N, no coincide con ninguna de las opciones (próximo a 60,1)

b) Sobre el plano:  $6 = 0,5 \cdot a \cdot 25 \rightarrow a = 0,48 \text{ m/s}^2$

Sustituyendo  $F = 40,5 + 10,8 \cdot 0,48 = 45,7$  N. Tomamos la opción b, 45,6

3. Respuesta c) 1,10 m. En la posición de equilibrio el peso de la bola está compensado con la componente vertical de la normal, y la componente radial de la normal está asociado a la fuerza centrípeta, cuyo valor depende de la velocidad de giro.

Si el cono tiene 2 m de radio y 4 m de altura, la tangente del ángulo desde el vértice es  $2/4=0,5$  y el ángulo es de  $26,6^\circ$ .

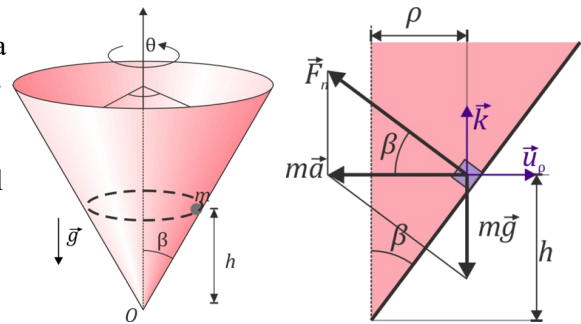
La normal formará ese ángulo con la horizontal, de modo que  $N_y = P \rightarrow N \cdot \sin(26,6^\circ) = m \cdot g$

En el eje horizontal  $N_x = m \omega^2 R_{\text{giro}}$

$$N \cdot \cos(26,6^\circ) = m \omega^2 h \cdot \tan(26,6^\circ)$$

Si dividimos las expresiones para eliminar N y m:

$$\tan(26,6^\circ) = g / (\omega^2 h \cdot \tan(26,6^\circ))$$



<http://laplace.us.es/wiki/index.php/Part>

[%C3%ADcula\\_en\\_una\\_superficie\\_c%C3%B3nica\\_\(GIE\)](#)

La velocidad angular la ponemos en rad/s  $\frac{180 \text{ rev}}{\pi} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \frac{2 \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 6 \text{ rad/s}$

Sustituyendo:  $h = 9,81 / (6)^2 \cdot (\tan(26,6^\circ))^2 = 1,09$  m

4. Respuesta b) 279 km/h. Aplicamos el teorema de las fuerzas vivas

$$\Delta E_c = W_{\text{total}} \Rightarrow E_{c \text{ fin}} - E_{c \text{ inic}} = \int F dx \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \int_0^{0,75} 0,1 \cdot (200 - x) dx$$

$$v^2 = \frac{2}{m} \left[ 0,1 \cdot \left( 200x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_0^{0,75} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{0,005} \cdot \left( 0,1 \cdot \left( 200 \cdot 0,75 - \frac{0,75^2}{2} \right) \right)} = 77,4 \text{ m/s} = 279 \text{ km/h}$$

5. Respuesta c) 109 kg/m<sup>3</sup>. Si en Ecuador están en ingravidez, la fuerza centrípeta es igual a la gravedad

$$F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M m}{R^2} = m \omega^2 R \Rightarrow M = \frac{\omega^2 R^3}{G} = \frac{4 \pi^2 R^3}{T^2 G}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\frac{4 \pi^2 R^3}{T^2 G}}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{3 \pi}{T^2 G} = \frac{3 \pi}{(10 \cdot 3600)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 109 \text{ kg/m}^3$$

6. Respuesta a) 11,1 m/s.

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow A^2 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$v = \pm \omega \sqrt{(A^2 - x^2)} = \pm \omega x = \pm \omega \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2 \pi}{0,10} \cdot \frac{0,25}{\sqrt{2}} = 11,1 \text{ m/s}$$

7. Respuesta b) 81 dB.





$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 10^{-12} \cdot (10^{\frac{70}{10}} + 10^{\frac{73}{10}} + 10^{\frac{80}{10}}) = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2 \Rightarrow \beta = 10 \cdot \log \frac{1,3 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 81,1 \text{ dB}$$

8. Respuesta d) 13,5 kV.

No se dan dimensiones de cada gota, pero asumimos carga en su superficie y el potencial lo obtenemos usando la expresión de la capacidad de una esfera cargada  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ , y  $C = Q/V$

No se da valor para permitividad eléctrica del mercurio; asumimos la misma que el vacío.

Si llamamos  $Q_1$  y  $R_1$  a la carga y radio de cada esfera pequeña, y  $Q_{50}$  y  $R_{50}$  para la grande

Para la esfera grande  $V_{50} = K \frac{Q_{50}}{R_{50}}$

Si unimos las 50 esferas, la carga total será la suma de todas  $Q_{50} = 50 \cdot Q_1$

Para la pequeña  $V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = K \frac{Q_1}{R_1} \Rightarrow Q_1 = V_1 \frac{R_1}{K}$

Relacionamos los radios, teniendo en cuenta la densidad es la misma (usamos  $M_1$  y  $M_{50} = 50 \cdot M_1$ )

$$\rho = \frac{M_{50}}{\frac{4}{3}\pi R_{50}^3} = \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \Rightarrow \frac{50 M_1}{R_{50}^3} = \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \Rightarrow R_{50}^3 = 50 R_1^3 \Rightarrow R_{50} = \sqrt[3]{50} R_1$$

Sustituyendo  $V_{50} = K \frac{50 \cdot V_1 \frac{R_1}{K}}{\sqrt[3]{50} R_1} = \frac{50 \cdot 100}{\sqrt[3]{50}} = 1357 \text{ V}$

La opción d) indica 13,5 y se parece, pero el resultado es 1,35 kV, no 13,5 kV. Asumimos es una errata y se corregiría durante el examen.

9. Respuesta a) 2,25 kV.

Como la  $E_m$  se conserva  $\Delta E_p = -\Delta E_c \Rightarrow q \Delta V = -(\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) - \frac{1}{2} m v_x^2) = -\frac{1}{2} m v_y^2$

Calculamos el tiempo que tarda en recorrer  $L_{\text{placas}} = 50 \text{ cm}$  en eje x que es el que estará acelerando en eje y.

$$E_c = -\Delta E_p = -q \Delta V \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-2q \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 30 \cdot 10^3}{9,0 \cdot 10^{-31}}} = 1,03 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

>Se trata de una velocidad relativista, ya que es un 34% de la velocidad de la luz; no es válido.

Usamos cálculos relativistas

$$E_c = (\gamma - 1) m c^2 = -q \Delta V \Rightarrow \gamma = 1 + \frac{-q \Delta V}{m c^2} = 1 + \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 30 \cdot 10^3}{9,0 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 1,059$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 9,87 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$t = \frac{x}{v} = \frac{0,5}{9,87 \cdot 10^7} = 5,07 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Durante ese tiempo, en el eje y, describiendo un MRUA, recorre la mitad de la distancia entre placas.

$$F = qE = ma \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{q \Delta V}{m \Delta x}$$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \frac{D_{\text{interplacas}}}{2} = \frac{1}{2} \frac{q \Delta V}{m D_{\text{interplacas}}} t^2 \Rightarrow \Delta V = m \frac{D_{\text{interplacas}}^2}{q t^2} = 9 \cdot 10^{-31} \cdot \frac{0,1^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,07 \cdot 10^{-9}} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Tomamos el resultado más próximo, a) 2,25 kV

10. Respuesta d) 1,4

La expresión del radio la obtenemos igualando fuerza magnética y centrípeta  $|q|vB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B}$

Planteamos la relación, y simplificamos al ser misma carga y campo, y sustituimos v en función de  $E_c$ .



$$\frac{\frac{m_A v_A}{|q_A|B}}{\frac{m_B v_B}{|q_B|B}} = \frac{2 m_B v_A}{m_B v_B} = \frac{2 \sqrt{\frac{2E_c}{m_A}}}{\sqrt{\frac{2E_c}{m_B}}} = \frac{2 \sqrt{m_B}}{\sqrt{2m_B}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,4$$

11. Respuesta d) 78,5°

Planteamos primero la reflexión total usando la 2ª ley de Snell de refracción

$$n_2 \operatorname{sen}(\theta_2) = n_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \Rightarrow \theta_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1,40} \operatorname{sen}(90^\circ)\right) = 45,58^\circ$$

Como se trata de un cubo, el ángulo respecto a al normal en ambas caras suma 90°, de modo que el ángulo refractado entrando al medio es 90-45,58=44,42°

Planteamos de nuevo refracción en el paso del aire al medio

$$n_1 \operatorname{sen}(\theta_1) = n_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \operatorname{arcsen}(1,4 \operatorname{sen}(44,42^\circ)) = 78,79^\circ$$

12. Respuesta a) -1/2

Usamos convenio DIN 1335 para signos: s=-5 cm  $A = \frac{-s'}{s} = \frac{1}{4} \Rightarrow s' = \frac{-s}{4} = \frac{5}{4} \text{ cm}$

Si es convexo:  $A = \frac{-s'}{s} = \frac{1}{4} \Rightarrow s' = \frac{-s}{4} = \frac{5}{4} \text{ cm}$   $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{\frac{5}{4}} + \frac{1}{-5} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{5}{3} \text{ cm}$

Si es cóncavo, f=-5/3 cm:  $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-5} = \frac{-3}{5} \Rightarrow s' = \frac{-5}{2} \text{ cm}$   $A = \frac{-s'}{s} = \frac{-(-5/2)}{-5} = \frac{-1}{2}$

### Problema de desarrollo D1.

a) Damos resultados con mismas cifras significativas que datos de enunciado: 2 cifras.

Tomamos eje y vertical, con y positivas hacia arriba.

Tomamos sistema de referencia inercial en el suelo, fuera del ascensor:

Las fuerzas actuantes son:

-El peso, dirigido hacia abajo, de módulo  $P=m \cdot g=3,0 \cdot 9,81=29,43 \text{ N}$ . Con dos cifras significativas  $P=29 \text{ N}$

-La normal, dirigida hacia arriba. Para calcular su módulo usamos la segunda ley de Newton

$N-P=m \cdot a \rightarrow N=P+m \cdot a=29,43+3,0 \cdot 2=35,43 \text{ N}$ . Con dos cifras significativas  $N=35 \text{ N}$

(La normal es mayor que el peso, ya que al estar acelerando el ascensor, la inercia del bloque hace que ejerza más fuerza sobre la mesa)

b) Tomamos sistema de referencia inercial en el suelo, fuera del ascensor:

Las fuerzas actuantes son las mismas en vertical, pero ahora tenemos fuerza aplicada y rozamiento en horizontal.

Usamos segunda Ley de Newton en eje horizontal, con x positivas hacia fuerza aplicada

$F-F_{\text{roz}}=m \cdot a_x \rightarrow F=\mu N+m \cdot a_x=0,40 \cdot 35,43+3,0 \cdot 2,5=21,672 \text{ N}$ . Con dos cifras significativas  $F=22 \text{ N}$

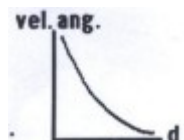
### Problema de desarrollo D2.

a) Se trata de un sistema en el que no se indica que hay rozamiento, por lo que se puede asumir que se conserva la energía mecánica y el momento angular.

Si tomamos momento angular respecto al centro de giro, al ser una trayectoria circular, el momento angular es perpendicular al radio, y su módulo es  $L=r \cdot m \cdot v=r \cdot m \cdot \omega \cdot r=m \cdot \omega \cdot r^2$ . Podemos plantear

$$L_A=L_B \Rightarrow m \cdot \omega_A \cdot r_A^2 = m \cdot \omega_B \cdot r_B^2 \Rightarrow \omega_B = \omega_A \frac{r_A^2}{r_B^2}$$

Si llamamos A a la situación inicial y B a la final,  $r_A > r_B$  (disminuye el radio), luego se trata de una situación en la que  $\omega_B > \omega_A$  (girará más deprisa). Es una situación de conservación de momento angular similar a los patinadores girando que acercan más la masa al eje de giro y giran más deprisa. Por ello la gráfica correcta es la que tiene menor  $\omega$  para r mayor. No están identificadas en enunciado, así que se habría que dibujarla de nuevo en la respuesta.



b) La tensión de la cuerda es la asociada a la fuerza centrípeta, y podemos plantear  $F_c=m\omega^2R$

No tenemos el valor de la velocidad angular ni el radio mínimos, pero sí hemos calculado en el apartado a una relación que nos permite relacionarlos con datos de velocidad angular y radio de enunciado, que no hemos utilizado en apartado a)



$$T_{\max} = m \omega_{\max}^2 r_{\min} = m \cdot \left( \omega_A \cdot \frac{r_A^2}{r_{\min}^2} \right)^2 \cdot r_{\min} = m \cdot \omega_A^2 \frac{r_A^4}{r_{\min}^3} \Rightarrow r_{\min} = \sqrt[3]{m \omega_A^2 \frac{r_A^4}{T}} = \sqrt[3]{0,5 \cdot (2\pi)^2 \cdot \frac{1^4}{105}} = 0,57 \text{ m}$$

**Problema de desarrollo D3.**

a) Para que la fuerza que actúa sobre cada una esté dirigida hacia el centro del cuadrado, tienen que estar las cargas de mismo signo en vértices opuestos. Realizamos un diagrama asignando un número a cada carga por claridad, aunque se ve que la situación es simétrica, y basta con calcular el módulo en uno de los 4 vértices.

Aplicando superposición

$$\vec{F}_{\text{Total-4}} = \vec{F}_{1-4} + \vec{F}_{2-4} + \vec{F}_{3-4}$$

$$F_{1-4} = F_{3-4} = K \frac{|q_1| |q_4|}{d_{14}^2}$$

$$F_{1-4} = F_{3-4} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0,3^2} = 0,4 \text{ N}$$

Al ser un cuadrado, las componentes x e y de fuerza 2-4 son las mismas

$$F_{2-4x} = F_{2-4y} = K \frac{q_2 q_4}{d_{24}^2} \cos 45^\circ$$

$$F_{2-4x} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2} \cdot 0,3)^2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,14 \text{ N}$$

Utilizando el diagrama para dar carácter vectorial a los módulos de cada fuerza y sumando

$$\vec{F}_{\text{Total-4}} = 0,4(-\vec{j}) + 0,14\vec{j} + 0,14\vec{i} + 0,4(-\vec{i}) = -0,26\vec{i} - 0,26\vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{\text{Total-3}} = 0,26\vec{i} - 0,26\vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{\text{Total-2}} = 0,26\vec{i} + 0,26\vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{\text{Total-1}} = -0,26\vec{i} + 0,26\vec{j} \text{ N}$$

b) Según el diagrama, se trata de mover la carga q1 del punto A al punto B.

El trabajo realizado por el campo es  $W_{A \rightarrow B} = -q_1 \Delta V = -q_1 (V(B) - V(A))$

El potencial en cada uno de los puntos lo obtenemos por superposición, y por simetría q2 y q4 generan el mismo potencial

$$V(A) = V_2(A) + V_3(A) + V_4(A) = 2K \frac{q_2}{d_{2A}} + K \frac{q_3}{d_{3A}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,3} + 9 \cdot 10^9 \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2} \cdot 0,3} = 7,76 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V(B) = V_2(B) + V_3(B) + V_4(B) = 2K \frac{q_2}{d_{2B}} + K \frac{q_3}{d_{3B}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2} \cdot 0,3/2} + 9 \cdot 10^9 \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2} \cdot 0,3/2} = 8,49 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$W_{A \rightarrow B} = -(-2 \cdot 10^{-6})(8,49 \cdot 10^4 - 7,76 \cdot 10^4) = 1,46 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

El trabajo realizado por el campo es positivo; es a favor del campo. Lo realizaría el campo espontáneamente (estamos llevando una carga negativa hacia potenciales mayores)

**Problema de desarrollo D4.**

Usando la ley de Ohm  $I = V/R$

Usando la ley de Faraday,  $\epsilon = -d\Phi/dt$

Usando la definición de flujo  $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$  Con B uniforme y espira plana perpendicular a campo  $\Phi = BS$

a) Si la espira se mueve de manera uniforme hacia abajo,  $S = a \cdot y$ , siendo y la longitud que queda dentro del campo, que si tomamos  $t=0$  cuando empieza a abandonarlo es  $y = b - v \cdot t$ .

$$\Phi = B \cdot a \cdot (b - v \cdot t) \rightarrow \epsilon = -Bav \rightarrow I = \epsilon/R \rightarrow 0,2 = -B \cdot 0,08 \cdot 6 / 0,02 \rightarrow B = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

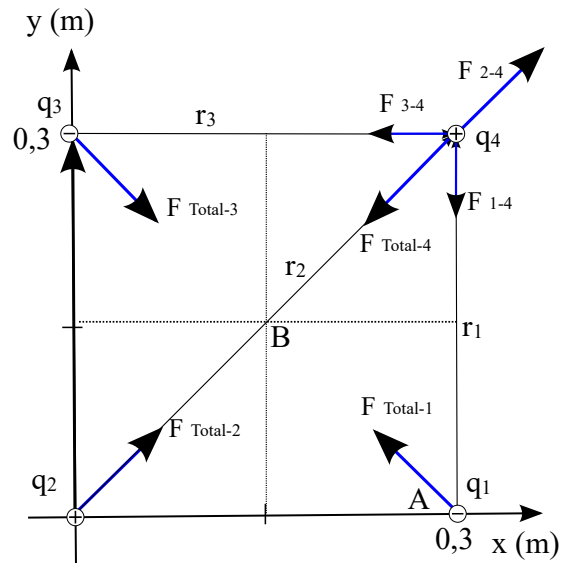
b) Si la espira se mueve de manera uniforme hacia la derecha,  $S = b \cdot x$ , siendo x la longitud que queda dentro del campo, que si tomamos  $t=0$  cuando empieza a abandonarlo es  $x = a - v \cdot t$ .

$$\Phi = B \cdot b \cdot (a - v \cdot t) \rightarrow \epsilon = -Bbv \rightarrow I = \epsilon/R \rightarrow 0,2 = -8,33 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot v / 0,02 \rightarrow v = 2,4 \text{ m/s}$$

**Problemas de tratamiento de datos experimentales**

**1. Propagación de incertidumbres**

**TDE1.**





Reordenamos la expresión y calculamos el valor

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = m \frac{4\pi^2}{T^2} = 210 \cdot 10^{-3} \frac{4 \cdot \pi^2}{1,1^2} = 6,851626 \text{ N/m}$$

Utilizamos propagación de errores.

$$dk = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m} dm\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T} dT\right)^2} \Rightarrow \Delta k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T} \Delta T\right)^2}$$

$$\Delta k = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \Delta m\right)^2 + \left(m 4\pi^2 (-2) \frac{1}{T^3} \Delta T\right)^2}$$

$$\Delta k = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{1,1^2} 5 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(210 \cdot 10^{-3} 4\pi^2 (-2) \frac{1}{1,1^3} 0,1\right)^2} = 1,2563862 \text{ N/m}$$

No podemos expresar resultado con más de 2 cifras significativas que es el peor número de cifras significativas de los datos del enunciado, y usamos una cifra para la incertidumbre  $k = 6,9 \pm 1 \text{ N/m}$

## 2. Ajuste lineal

### TDE2.

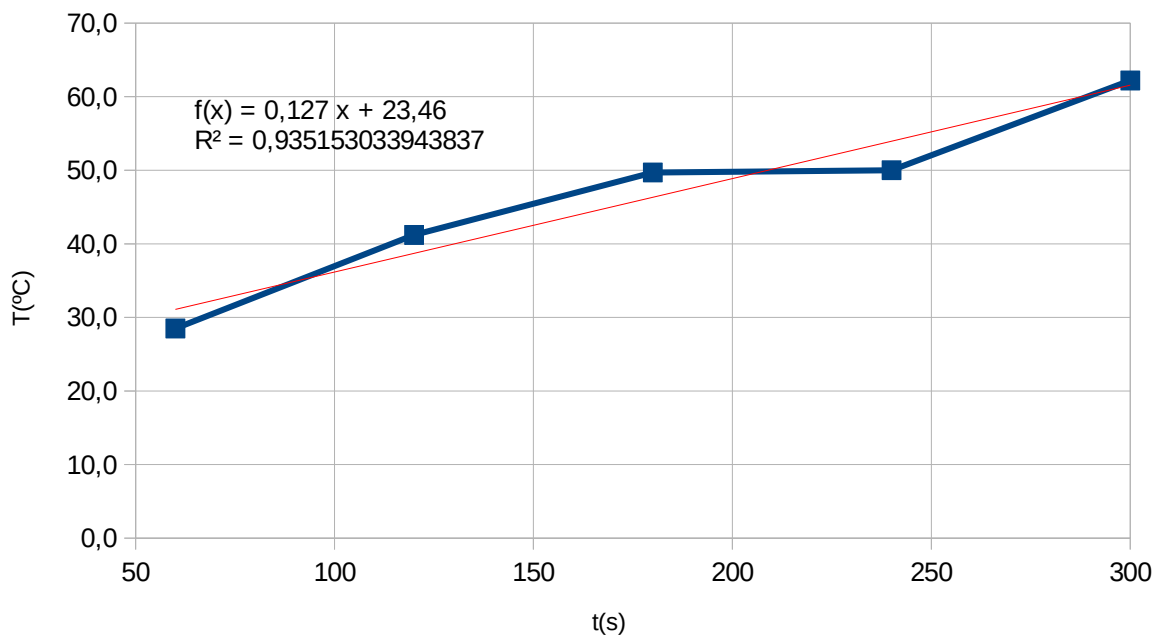
a) Obtenemos una expresión para plantear la regresión lineal a partir de la expresión original

$$Q = V^2 \frac{t}{R} \Rightarrow m \cdot c_e \cdot (T - T_0) = V^2 \frac{t}{R} \Rightarrow T = T_0 + \frac{V^2}{m \cdot c_e \cdot R} t$$

Que es la ecuación de una recta  $y = mx + n$ , donde  $y = T$ ,  $x = t$ ,  $n = T_0$  y  $m = V^2/mc_e R$

Representamos

t(min)	1	2	3	4	5
t(s)	60	120	180	240	300
T(°C)	28,5	41,2	49,7	50,0	62,2



Se puede ver que es aproximadamente una recta

Realizamos el ajuste por mínimos cuadrados

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+%7B%7B60%2C28.5%7D%2C%7B120%2C41.2%7D%2C%7B180%2C49.7%7D%2C%7B240%2C50.0%7D%2C%7B300%2C62.2%7D%7D>



Input interpretation:

fit	data	{{(60, 28.5), (120, 41.2), (180, 49.7), (240, 50), (300, 62.2)}}
	model	linear function

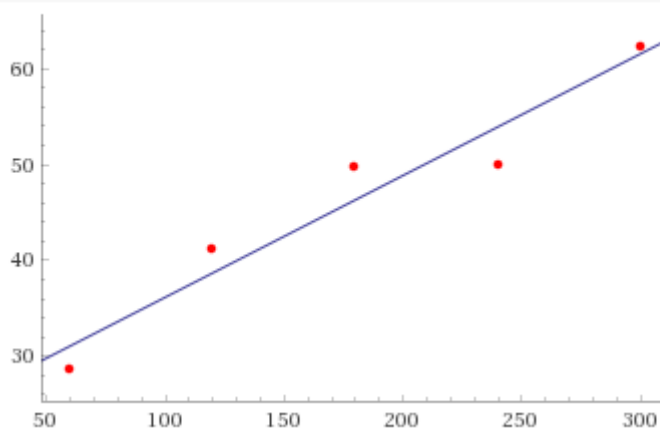
Least-squares best fit:

$$0.127x + 23.46$$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	$R^2$	adjusted $R^2$
31.1736	30.0019	0.935153	0.913537

Plot of the least-squares fit:



Vemos que  $T_0 = 23,46 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\frac{V^2}{mc_e R} = 0,127 \Rightarrow R = \frac{V^2}{mc_e R} = \frac{220^2}{1 \cdot 4,18 \cdot 10^3 \cdot 0,127} = 91,17 \Omega$$

Además de pedir los valores, se pide la incertidumbre; habría que hacerlo a partir de información de la gráfica, de las desviaciones de los puntos respecto a la recta ajustada.

La incertidumbre no se pedía explícitamente en 2018, 2017 ni 2016, pero sí en 2015, y allí se usaba planteamiento de pendientes en la gráfica de Aragón, pero en este caso los puntos tienen bastante desviación (entre puntos 1 y 2 sale una pendiente casi el doble, y entre puntos 3 y 4 una pendiente casi cero, por lo que el error sería casi del 100%) y no parece razonable ese planteamiento.

Pendiente realizar: las expresiones de incertidumbre en pendiente  $a$  y en la ordenada en el origen  $b$  en ajuste por mínimos cuadrados se pueden ver en

[https://www.ugr.es/~esteban/earth/apuntesbasesfisicas/tr\\_err.pdf#page=12](https://www.ugr.es/~esteban/earth/apuntesbasesfisicas/tr_err.pdf#page=12)

$$\text{Error pendiente } \Delta a = \left( \frac{\sum (y_i - a x_i - b)^2}{(N-2) \sum (x_i - \bar{x})^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Error ordenada en el origen } \Delta b = \left[ \left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right) \left( \frac{\sum (y_i - a x_i - b)^2}{(N-2)} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$



### Madrid 2018

1. Respuesta d) 76°. Es un tiro parabólico, MRUA vertical y MRU horizontal:  $v_{oy}=v_0 \cdot \text{sen} \alpha$  y  $v_{ox}=v_0 \cdot \text{cos} \alpha$   
 El tiempo de vuelo es dos veces el de subida que consigue  $v_y=0$ , que es  $v_0 \cdot \text{sen} \alpha - g \cdot t=0 \rightarrow t=v_0 \cdot \text{sen} \alpha / g$

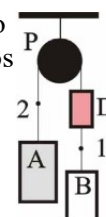
La altura máxima al ser MRUA es 
$$\frac{v_0^2 \cdot (\text{sen} \alpha)^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \cdot (\text{sen} \alpha)^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \cdot (\text{sen} \alpha)^2}{g}$$

(También planteable como  $v^2 - v_0^2 = 2as$ )

En tiempo de vuelo, tiempo en eje x MRU fija alcance 
$$v_0 \cdot \text{cos} \alpha \cdot 2 \frac{v_0 \cdot \text{sen} \alpha}{g} = 2 \frac{v_0^2}{g} \text{cos} \alpha \cdot \text{sen} \alpha$$

Si ambos son iguales 
$$\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \cdot (\text{sen} \alpha)^2}{g} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha \Rightarrow \text{tg} \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \arctan(4) = 75,96^\circ$$

2. Respuesta c) 13,1 N. La tensión es la misma en ambos extremos de una cuerda inextensible, pero por enunciado lo que indica es que hay dos tramos de cuerda: uno sobre la polea, y otro entre las dos masas del mismo lado. (La tensión de la cuerda que une las dos masas por la que se pregunta sería la asociada a punto 1 en el diagrama que se incluye tomado de <http://docplayer.es/22587870-2-4-masas-enlazadas.html>)



En este caso globalmente  $2mg - mg = 3ma \rightarrow a = g/3$

Para la masa inferior  $mg - T_1 = ma \rightarrow T_1 = mg - mg/3 = (2/3)mg = (2/3) \cdot 2 \cdot 9,81 = 13,08 \text{ N}$

3. Respuesta d) 3,70. La fuerza centrípeta asociada a esa masa, velocidad (54 km/h=15 m/s) y radio es  $m \cdot v^2/R = 500 \cdot 15^2/40 = 2812,5 \text{ N}$ . El peso es  $500 \cdot 9,81 = 4905 \text{ N}$ . Podemos plantear un diagrama de fuerzas que actúan en ambos casos, pero tenemos en cuenta que se piden fuerzas que realiza el vehículo sobre el puente. Sobre vehículo actúa el peso y la normal que realiza el puente sobre el vehículo

Caso 1: sobre el puente actúa el coche con una fuerza  $F_1$  cuya reacción es la normal.

$F_c = N - P \rightarrow F_1 = N = F_c + P = 2812,5 + 4905 = 7717,5 \text{ N}$

Caso 2: sobre el puente actúa el coche con una fuerza  $F_2$  y su valor máximo es la normal, de modo que la fuerza total sea la centrípeta, peso menos normal, sea la asociada a esa curvatura.

$F_c = P - N \rightarrow F_2 = N = P - F_c = 4905 - 2812,5 = 2091,5 \text{ N}$

$F_1/F_2 = 7717,5/2091,5 = 3,69$

4. Respuesta b) 0,27. Se asume que parte de velocidad inicial nula, luego planteando conservación de energía, la energía disipada por el rozamiento en la bajada por la rampa y en el deslizamiento por el plano es igual a la energía potencia asociada a la altura inicial. En el plano inclinado, la fuerza de rozamiento está asociada a la normal, que es igual a la componente y del peso del cuerpo, luego  $F_{roz1} = \mu N = \mu mg \cdot \text{cos}(30^\circ)$ . En el plano horizontal,  $F_{roz2} = \mu N = \mu mg$ . Llamamos  $d$  a la distancia recorrida en rampa y horizontal, por lo que la altura de la rampa será  $d \cdot \text{sen}(30^\circ)$

$$mgh = E_{\text{disipada1}} + E_{\text{disipada2}}$$

$$mg d \text{sen}(30) = \mu mg \text{cos}(30) \cdot d + \mu mg \cdot d$$

$$\mu = \frac{\text{sen}(30)}{1 + \text{cos}(30)} = 0,27$$

5. Respuesta b) 18,9. Igualando fuerza centrípeta a gravitatoria en órbita circular llevamos a la tercera ley de Kepler

$R^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T^2$ . Para la densidad de una esfera, dividimos masa entre su volumen y llegamos a

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi \frac{GM}{4\pi^2} T^2} = \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3\pi}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (24 \cdot 3600)^2} = 18,9 \text{ kg/m}^3$$

6. Respuesta a) 0,45. Usando ley de Hooke  $F = k\Delta x \rightarrow k = 30/0,01 = 3000 \text{ N/m}$ . El trabajo necesario para alargarlo 1,00 cm más es la diferencia de energía potencial que hay que aportar, que es la diferencia de energía potencial elástica entre ambas situaciones.  $E_p = 0,5 \cdot k \cdot x^2$

Alargado 1,00 cm  $\rightarrow E_p = 0,5 \cdot 3000 \cdot (0,01)^2 = 0,15 \text{ J}$

Alargado 2,00 cm (1 cm más respecto situación anterior)  $\rightarrow E_p = 0,5 \cdot 3000 \cdot (0,02)^2 = 0,6 \text{ J}$

La diferencia es  $0,6 - 0,15 = 0,45 \text{ J}$

7. Respuesta c) 11,1. Los 100 dB suponen  $10^{-12} \cdot 10^{10} = 10^{-2} \text{ W/m}^2$  y que 80 dB suponen  $10^{-12} \cdot 10^8 = 10^{-4} \text{ W/m}^2$   
 Si planteamos que la intensidad es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia y que el foco es el mismo en ambos casos



$$\frac{I_x}{I_{x+100}} = \frac{(x+100)^2}{x^2} \Rightarrow x^2 = (x+100)^2 \frac{I_{x+100}}{I_x} \Rightarrow x = \pm (x+100) \sqrt{\frac{I_{x+100}}{I_x}}$$

$$x = \pm (x+100) \cdot \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-2}}} = \pm (x+100) \cdot \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{100}{9} \approx 11,1 \text{ m}$$

8. Respuesta d) 50,4. La presión hidrostática es  $P=dgh$ . Según datos  $1 \text{ atm} = 101300 \text{ Pa}$  y  $d=1025 \text{ kg/m}^3$   
 $5 \cdot 101300 = 1025 \cdot 9,81 \cdot h \rightarrow h=50,37 \text{ m}$

9. Respuesta b) +71. La carga de cada una se distribuye de manera uniforme en su superficie. Al contactar las esferas con un conductor de capacidad despreciable, éste no retiene carga, y la se distribuye carga entre ambas, y en el nuevo equilibrio ambas se encuentran al mismo potencial.

Utilizando la expresión de la capacidad de una esfera cargada  $C=4\pi\epsilon_0 R$ , y  $C=Q/V$ , planteamos

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Planteamos un sistema de ecuaciones sabiendo que la carga total es  $2 \text{ nC} + 4 \text{ nC} = 6 \text{ nC}$

$$\frac{Q_1}{0,02} = \frac{Q_2}{0,10} \Rightarrow Q_2 = 5Q_1$$

$$Q_1 + Q_2 = 6 \cdot 10^{-9} \Rightarrow 6Q_1 = 6 \cdot 10^{-9} \Rightarrow Q_1 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ C y } Q_2 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Una vez que las esferas tengan cada una esa carga, para los cálculos del problema, las consideramos puntuales y calculamos el trabajo asociado a alejar una carga de otra.

Inicialmente sus centros estaban a  $2+15+10=27 \text{ cm}$ . La  $E_p$  de una respecto a la otra es

$$E_p = K \frac{Q_1 Q_2}{R_{inicial}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{0,27} = 1,67 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Al alejarlas  $20 \text{ cm}$  más sus centros pasan a estar a  $57 \text{ cm}$ . La  $E_p$  de una respecto a la otra es

$$E_p = K \frac{Q_1 Q_2}{R_{final}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{0,47} = 9,57 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

El trabajo realizado por el campo es  $W=-\Delta E_p = -(9,57 \cdot 10^{-8} - 1,67 \cdot 10^{-7}) = 7,13 \cdot 10^{-8} \text{ J} = 71,3 \text{ nJ}$

10. Respuesta d) 11,9. En el recorrido entre A y B el campo eléctrico es uniforme y describe un MRUA donde es acelerado, y entre C y D describe un MRUA donde es frenado. Entre B y C describe un MRU.

El tiempo que emplea en acelerar entre A y B es el mismo que en frenar entre C y D.

A y B:  $a=F/m=(q \cdot E)/m=(e \cdot \Delta V/\Delta x)/m_e=(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 200/0,02)/9 \cdot 10^{-31}=1,78 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$

$x = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow 0,02=0,5 \cdot 1,78 \cdot 10^{15} \cdot t^2 \rightarrow t=4,74 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 4,74 \text{ ns}$

B y C:  $v=at=1,78 \cdot 10^{15} \cdot 4,74 \cdot 10^{-9}=8,4372 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

$x=vt \rightarrow t=x/v=0,02/8,4372 \cdot 10^6=2,37 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 2,37 \text{ ns}$

En total  $4,74 \cdot 2 + 2,37 = 11,9 \text{ ns}$

11. Respuesta d) 149. El flujo es  $B \cdot S \cdot \cos(\omega t)$ , y según la ley de Faraday el módulo máximo de la fem será  $\epsilon = \omega \cdot B \cdot S$ , y si cada espira es cuadrada será  $\epsilon = \omega \cdot B \cdot N \cdot l^2$  por lo que operando

$l^2 = 75,0 / (79,1 \cdot 0,170 \cdot 248) = 2,45 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \rightarrow l = 0,15 \text{ m}$ . Asumimos un solenoide cuadrado; la superficie total es la suma de todas las espiras.

La longitud si son 248 espiras y cada una tiene  $4 \cdot l$  supone  $248 \cdot 4 \cdot 0,15 = 149 \text{ m}$

12. Respuesta c) +10. Real, invertida y tamaño mayor supone que la lente es convergente. Usando convenio de signos según norma DIN 1335:  $s'=30 \text{ cm}$ ,  $A=-2$  y la potencia es positiva.

Para lentes  $A = \frac{s'}{s} = -2 \Rightarrow s' = -2s \Rightarrow s = -15 \text{ cm}$  Para poner en dioptrías pasamos distancias a metros

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P = \frac{1}{0,3} - \frac{1}{-0,15} = 10 \text{ dioptrías}$$

### Problema de desarrollo D1.

a) Se trata de un problema de cinemática donde se combinan MRUA en eje vertical y MRU en eje horizontal.

Planteamos eje y vertical con origen en el suelo, y nombramos 1 a primera partícula y 2 a la segunda

Tendremos que  $g=-9,81 \text{ m/s}^2$

Planteamos una caída libre en general  $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \text{En altura } x = y_0 + 0,5 \cdot a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{y_0 - x}{0,5 \cdot a}}$

Para partícula 1  $v_0 y = 0$ ,  $y_0 = 45 \text{ m}$  y en suelo  $x = 0 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{45}{0,5 \cdot 9,81}} \approx 3,03 \text{ s}$



Para partícula 2 se trata de dos caídas libres ambas iniciadas con velocidad inicial vertical nula (que caiga con cierta velocidad horizontal no influye, y en el choque vuelve a iniciar caída con velocidad nula)

Primer tramo (hasta altura h)  $t_{2_{\text{hastah}}} = \sqrt{\frac{45-h}{0,5 \cdot 9,81}}$

Segundo tramo (desde altura h hasta suelo)  $t_{2_{\text{hastasuelo}}} = \sqrt{\frac{h}{0,5 \cdot 9,81}}$

La diferencia pedida es  $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{0,5 \cdot 9,81}} (\sqrt{45-h} + \sqrt{h} - \sqrt{45})$  con h en m y t en s.

b) Para obtener el máximo derivamos respecto a la altura e igualamos a 0

$$\frac{d\Delta t}{dh} = \frac{1}{\sqrt{0,5 \cdot 9,81}} \left( \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{45-h}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{h}} \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{45-h} = \sqrt{h} \Rightarrow h = \frac{45}{2} = 22,5 \text{ m}$$

Podríamos hallar la derivada segunda en ese punto para comprobar que es un máximo y no un mínimo, pero asumimos es máximo

### Problema de desarrollo D2.

Para volcar el objeto sin deslizar alrededor de una arista, el objeto debe girar con eje en esa arista hasta llegar al punto en el que vuelque, que es cuando la vertical pasa por la arista y el centro del cubo.

a) El trabajo a realizar para volcar el objeto manteniendo fija la arista será igual a la diferencia de energía potencial entre ambas situaciones, asumiendo ambas situaciones con energía cinética del bloque nula.

Si tomamos referencia  $h=0$  en la base del camión, y llamamos A y B a ambas situaciones

A: Bloque apoyado con una cara sobre el camión, centro de masas a una distancia de media arista, a 0,25 m

B: Bloque apoyado con una arista sobre el camión y el centro de masas en la vertical, a  $\sqrt{2} \cdot 0,25$  m.

$$W_{A \rightarrow B, \text{realizado externamente}} = \Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = m \cdot g \cdot (h_B - h_A) = 3,5 \cdot 9,81 \cdot (\sqrt{2} \cdot 0,25 - 0,25) = 3,565 \text{ J}$$

b) El origen de la fuerza que haría volcar el objeto es la inercia: el camión frena pero el bloque no está fijo al camión y tiende a continuar su MRU lo que lo hace volcar. Habría que aclarar que la inercia no es una fuerza real, es una fuerza ficticia que incluimos en un sistema de referencia no inercial, como es el caso del camión frenando. La fuerza de inercia tiene un valor de módulo  $m \cdot a_i$ , siendo  $a_i$  la aceleración del sistema no inercial, que es el camión frenando, y dirigida hacia delante.

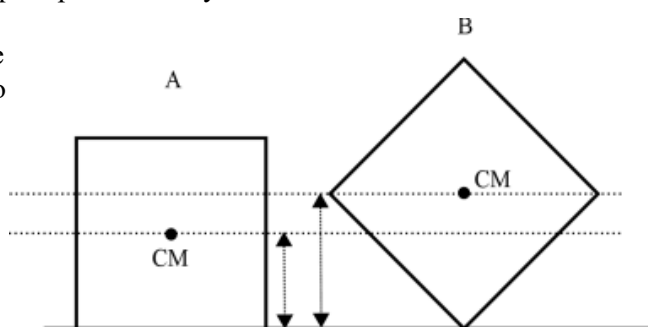
Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

- El peso, aplicado sobre el centro de masas, se opone al giro mientras el centro de masas del bloque sube.
- La normal, que es la reacción del suelo a la fuerza vertical que el bloque realiza sobre el suelo al estar en contacto con él, sobre la superficie de contacto, y hace que el bloque no se hunda en el suelo.
- La fuerza que el suelo hace sobre el bloque asociada a que haya rozamiento.
- La fuerza de inercia (aunque no es una fuerza real)

La fuerza de rozamiento en este caso es estática, no dinámica, y tiene un valor variable que puede ir creciendo según lo intensa que sea la frenada, ya que se asume que la arista del bloque sobre el que gira en ningún momento pierde el contacto con el suelo ni desliza.

c) Si vuelca, lo primero que tiene que ocurrir es que el bloque se comience a levantar girando sobre la arista, por lo que analizamos esa situación. Justo en ese instante, el bloque está apoyado solamente en la arista, pero sigue estando horizontal. La normal en ese momento se aplica sobre esa arista. Para que haya giro podemos plantear que el momento de las fuerzas respecto de la arista no sea nulo.

$$\vec{M}_{\text{peso}} + \vec{M}_{\text{inercia}} = 0 \Rightarrow 0,25 \cdot m \cdot g - 0,25 \cdot m \cdot a + i \cdot 0 \Rightarrow a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

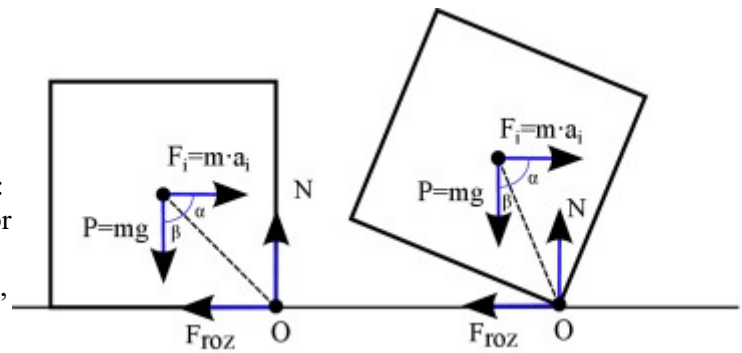






(En caso de que no fuera cúbico y el centro de masas no estuviera tanto en el centro horizontal como verticalmente, el resultado variaría)

Por último nos podemos plantear si superada esa condición inicial, se completaría el vuelco: podemos ver que las fuerzas que actúan a favor (la inercia) y en contra (el peso), se mantienen constantes en módulo (la frenada es uniforme), pero en cuanto empieza a girar sobre O el momento del peso es menor (disminuye el



ángulo  $\beta$ , disminuye la distancia del punto O al eje de acción del peso, ya que el centro de masas se acerca a la vertical del punto O) y el momento de la inercia es mayor (aumenta el ángulo  $\alpha$ , aumenta la distancia del punto O al eje de acción de la fuerza de inercia, ya que se eleva el centro de masas respecto de O), de modo que el momento de giro aumenta y se completa el vuelco.

### Problema de desarrollo D3.

Similar a problema Física 2 de oposiciones Andalucía 1996

<http://www.fiquipedia.es/home/recursos/recursos-para-oposiciones/1996-Andaluc%C3%ADa-F%C3%ADsica2.pdf>

a) Realizamos la deducción de la expresión asociada al periodo de un péndulo cuando solamente existe gravedad: proviene de igualar aceleración tangencial a la componente tangencial de aceleración del peso, donde el signo proviene de la referencia del ángulo

$$a_T = \frac{F_{\text{tangencial}}}{m} \Rightarrow \alpha \cdot L = -g \sin \theta \quad \text{Operando} \quad L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Con la aproximación  $\theta = \sin \theta$  (1% error para ángulos menores  $14^\circ$ ) se llega a la

expresión de un MAS (en función  $\theta$ )  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g}{L} \theta$  donde  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$  y

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Numéricamente  $T = 2\pi \sqrt{\frac{0,50}{9,81}} = 1,42 \text{ s}$

b y c) Si tenemos el péndulo entre las placas del condensador, además de considerar la fuerza del peso hay que considerar la fuerza eléctrica  $F=qE$  que según el caso puede aumentar o disminuir esa fuerza neta. Como el campo es uniforme,  $V=Ed$ , por lo que  $F = \frac{qV}{d}$ , y la aceleración tangencial será la segunda ley de

Newton es  $a = \frac{qV}{md}$ . El signo dependerá de la carga del péndulo y del sentido de la diferencia de potencial entre las placas.

Se puede ver que en la expresión “g” está asociada a la aceleración neta vertical recuperadora, y podemos

plantear  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{a_{\text{vertical recuperadora neta}}}}$

En función de si la fuerza eléctrica es a favor o en contra de la fuerza gravitatoria, manteniendo la longitud, el periodo disminuirá o aumentará.

Si T disminuye, es porque la aceleración vertical recuperadora neta es mayor.

Para que la fuerza recuperadora sea mayor, la fuerza eléctrica tiene mismo sentido que la gravitatoria.

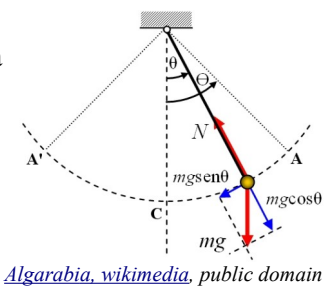
Para que la fuerza eléctrica vaya hacia abajo siendo la carga positiva, el campo también iría hacia abajo.

Como el campo eléctrico va dirigido hacia potenciales menores, el “sentido del voltaje aplicado”, que es lo que se pide, es que habría mayor potencial en la placa superior.

d)  $T_{\text{menor}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + \frac{qV}{md}}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,4}{9,81 + \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{0,030 \cdot 1}}} = 1,31 \text{ s}$

### Problema de desarrollo D4.

Es un problema similar a problema de desarrollo B de fase local Madrid 2016.



*Algarabia, wikimedia, public domain*



Realizamos un diagrama indicando ejes.

La velocidad inicial la podemos obtener a partir de la diferencia de potencial con la que es acelerado, asumimos que desde el reposo: tendrá una energía de 300 eV, que supone  $E=q \cdot \Delta V=300 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  J

Su velocidad asumiendo es no relativista  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ ;  $v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,0 \cdot 10^{-31}}} = 1,03 \cdot 10^7$  m/s

(es un 3% de la velocidad de la luz, no relativista)

Como el campo magnético y la velocidad son perpendiculares, usando la ley de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$  vemos que inicialmente la fuerza estará dirigida hacia arriba, y en la zona con campo magnético describirá un arco de circunferencia cuyo radio podemos calcular

$$F_{mag} = F_{cent} \Rightarrow qvB = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{9,0 \cdot 10^{-31} \cdot 1,03 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,46 \cdot 10^{-3}} \approx 3,97 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

El radio es mayor de los 2,5 cm de ancho de la región con campo magnético, por lo que sí sale de ella sin regresar por completar media circunferencia.

Llamamos C al punto de salida de la región con campo magnético, aplicando trigonometría en el diagrama se ve que angularmente ha recorrido un ángulo que tiene

$$\theta = \arcsen \frac{0,025}{0,0397} = 39,03^\circ$$

por lo que altura del punto C

$$h_A = 0,0397 - 0,0397 \cdot \cos(39,03^\circ) \approx 8,86 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

El campo magnético no modifica el módulo de la velocidad, por lo que sabemos que el módulo de la velocidad en el punto C es el mismo, y a partir de ese momento describe un MRU hasta impactar con la pantalla en el punto BA Aplicando trigonometría

$$h_A = h_C + 0,05 \cdot \text{tg}(\theta) = 8,86 \cdot 10^{-3} + 0,05 \cdot \text{tg}(39,03^\circ) \approx 4,94 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

El punto de incidencia sería A (0, 30, 10) en cm.

## Problemas de tratamiento de datos experimentales

### 1. Propagación de incertidumbres

#### TDE1.

En este caso no dan expresión porque debe conocerse  $n_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) = n_2 \cdot \text{sen}(\theta_2)$

Asumimos que el primer medio es aire aunque no se indica explícitamente, y tenemos  $n_2 = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)}$

El valor es  $n_2 = \frac{\text{sen}(75)}{\text{sen}(45)} = 1,3660254$

Utilizamos propagación de errores. Utilizamos incertidumbre en radianes: el valor dependería de si usamos grados sexagesimales, centesimales ...

$$dn = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \theta_1} d\theta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \theta_2} d\theta_2\right)^2} \Rightarrow \Delta n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2\right)^2}$$

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{\cos(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)} \Delta \theta_1\right)^2 + \left(\text{sen}(\theta_1) \cdot \frac{(-\cos(\theta_2))}{\text{sen}(\theta_2)^2} \Delta \theta_2\right)^2}$$

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{\cos(75)}{\text{sen}(45)} \frac{2\pi}{360} 0,5\right)^2 + \left(\text{sen}(75) \cdot \frac{(-\cos(45))}{\text{sen}(45)^2} \frac{2\pi}{360} 0,5\right)^2} = 0,012341$$

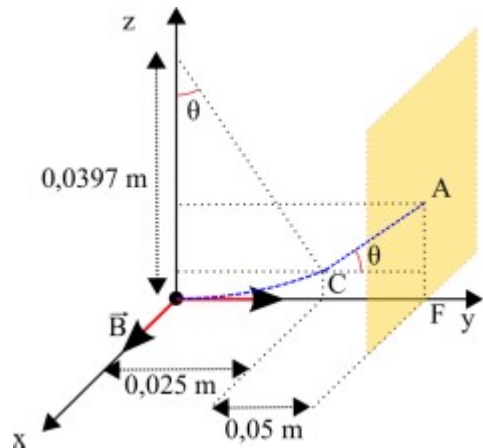
No podemos expresar resultado con más de 3 cifras significativas que es el número de cifras significativas de los datos del enunciado, y usamos una cifra para la incertidumbre  $n = 1,37 \pm 0,01$

### 2. Ajuste lineal

#### TDE2.

a) Reordenamos y tomamos logaritmos en la expresión original

$$I = \alpha V e^{\frac{-V}{\beta}} \Rightarrow \frac{I}{V} = \alpha e^{\frac{-V}{\beta}} \Rightarrow \ln\left(\frac{I}{V}\right) = \frac{-V}{\beta} + \ln(\alpha)$$

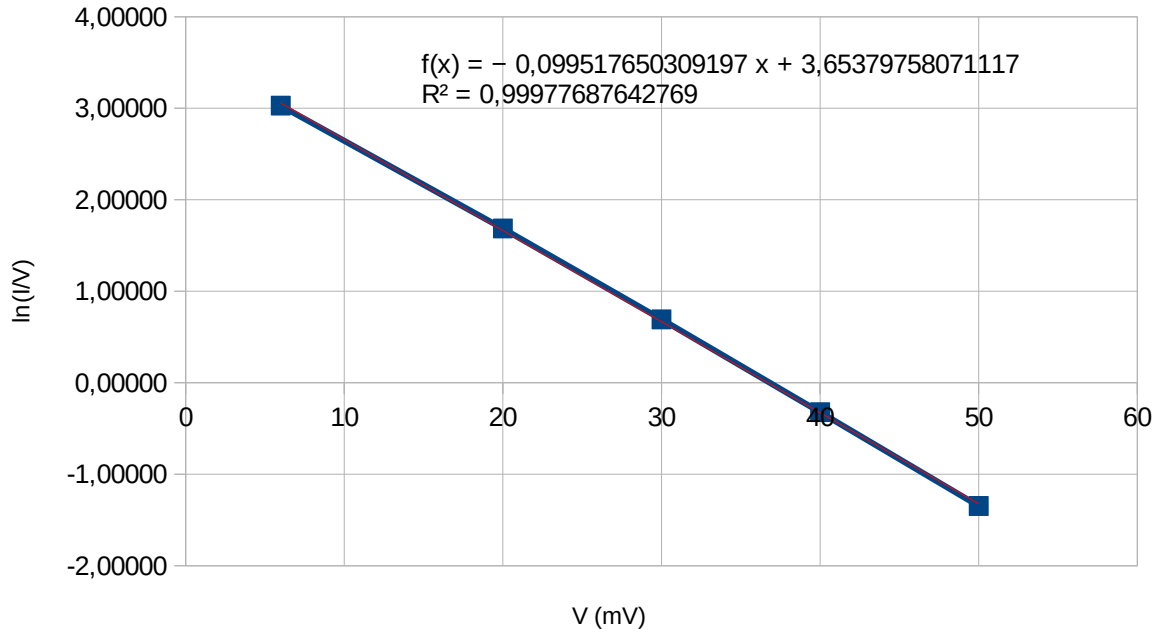




Tenemos una expresión lineal  $y=mx+n$ , donde  $y=\ln(I/V)$ ,  $x=V$

b, c y d) Representamos gráficamente, realizando las operaciones previas según transformación apartado a.

V (mV)	6	20	30	40	50
I (mA)	124	108	60	29	13
I/V	20,66667	5,40000	2,00000	0,72500	0,26000
ln(I/V)	3,02852	1,68640	0,69315	-0,32158	-1,34707



Vemos que es aproximadamente una recta  
 Realizamos el ajuste por mínimos cuadrados

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+%7B%7B6,+3.02852%7D,%7B20,1.68640%7D,%7B30,0.69315%7D,%7B40,-0.32158%7D,%7B50,-1.34707%7D%7D>

Vemos que se obtiene

$$\frac{-1}{\beta} = 0,0995175$$

$$\beta = \frac{-1}{0,0995175} \approx -10,048$$

$$\ln(\alpha) = 3,6538$$

$$\alpha = e^{3,6538} \approx 38,62$$

Tomando 2 cifras significativas como en los datos de enunciado (realmente habría que hacerlo a partir de información de la gráfica, de las desviaciones de los puntos respecto a la recta ajustada, asociado a estimar incertidumbre) tenemos

$$\alpha \approx 39$$

$$\beta \approx -10$$

*Enunciado indica acompañar dibujo de breve informe sobre la metodología utilizada; se trataría de indicar en qué consiste un ajuste por mínimos cuadrados y cómo se ha realizado el ajuste con la calculadora*

fit	data	((6, 3.02852), (20, 1.68640), (30, 0.69315), (40, -0.32158), (50, -1.34707))
	model	linear function

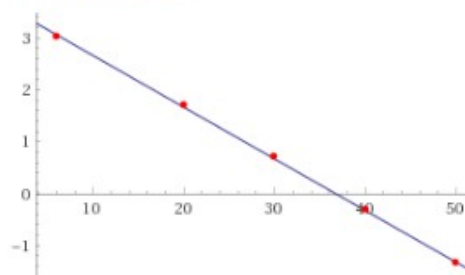
Least-squares best fit:

$$3.6538 - 0.0995175 x$$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R <sup>2</sup>	adjusted R <sup>2</sup>
-17.0796	-18.2513	0.999777	0.999702

Plot of the least-squares fit:





## Madrid 2017

1. Respuesta a) 6:00. Se asume que están lo suficientemente cerca para considerar que el Sol sale a la misma hora en ambas localidades A y B (razonable ya que se indica caminando) y que la velocidad de ambos es constante pero no idéntica. Llamamos  $x$  a la hora de salida expresada en horas respecto medianoche, y  $t$  a la hora también respecto medianoche. Llamamos  $d$  a la distancia entre A y B, la posición de cada uno es una recta y tomando origen en A,  $x_A = v_A \cdot (t-x)$ ,  $x_B = d - v_B(t-x)$ ; de modo que en la salida ( $t=x$ ), tenemos  $x_A=0$  y  $x_B=d$ .

$$\text{Si } t=12 \text{ (encuentro): } x_A=x_B: \quad v_A \cdot (12-x) = d - v_B \cdot (12-x) \quad [1]$$

$$\text{Si } t=16 \text{ (llegada de A): } x_A=d: \quad d = v_A \cdot (16-x) \quad [2]$$

$$\text{Si } t=21 \text{ (llegada de B): } x_B=0: \quad 0 = d - v_B \cdot (21-x) \quad [3]$$

Tenemos 3 ecuaciones con 4 incógnitas ( $d$ ,  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $x$ ), pero solamente necesitamos conocer  $x$ .

Combinamos 2ª y 3ª haciendo desaparecer  $d$

$$v_A \cdot (16-x) = v_B \cdot (21-x) \quad [4]$$

Despejamos  $d$  de la tercera y sustituimos en la primera

$$v_A \cdot (12-x) = v_B \cdot (21-x) - v_B \cdot (12-x)$$

$$v_A \cdot (12-x) = 9 \cdot v_B \quad [5]$$

Dividimos término a término cuarta y quinta

$$\frac{16-x}{12-x} = \frac{21-x}{9} \Rightarrow 144 - 9x = 252 - 33x + x^2 \Rightarrow x^2 - 24x + 108 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=6 \\ x=18 \end{matrix} \quad \text{No válida } x=18.$$

Comentario: en julio 2017 descubro la historia problema en un post de Francis Villatoro

<http://francis.naukas.com/2010/06/04/d-e-p-vladimir-igorevich-arnold-siempre-la-verdad-aunque-escandalice/> a través de este tuit <https://twitter.com/omalaled/status/886497864070950912> donde aportan otras resoluciones.

2. Respuesta b) 680. Usando 2ª Ley de Newton y conociendo masa y aceleración de cada bloque calculamos fuerzas totales sobre cada bloque

$$\text{Bloque superior } F = m \cdot a = 20 \cdot 4 = 80 \text{ N.}$$

$$\text{Bloque inferior } F = m \cdot a = 100 \cdot 6 = 600 \text{ N.}$$

Si ambas masas no tienen la misma aceleración es porque hay más fuerzas, que supone rozamiento entre ellas. Si no hubiera rozamiento la masa superior estaría en reposo / su aceleración estaría desligada del movimiento de la masa inferior. Al moverse el bloque inferior hacia la derecha (asumimos que no hay rozamiento de bloque inferior con el suelo) por inercia el bloque superior tendería a no ser arrastrado, y la fuerza de rozamiento lo arrastra junto al bloque inferior, por lo que va en el sentido de la fuerza aplicada sobre el bloque inferior, hacia la derecha en diagrama. La única fuerza en eje horizontal que actúa sobre el bloque superior y lo empuja es el rozamiento con el inferior, por lo que sabemos que son 80 N. Sobre el bloque inferior actúa la reacción a la fuerza de rozamiento anterior, lo que lo frena. Ignorando rozamiento con el suelo las fuerzas en eje horizontal que actúan sobre el bloque inferior son reacción del rozamiento (-80 N) y fuerza aplicada, y la suma de ambas debe ser 600 N, por lo que la fuerza aplicada total deben ser 680 N.

3. Respuesta c) 77,4. Utilizamos el teorema de las fuerzas vivas  $\Delta E_c = W_{TOTAL}$

$$W = \int_0^{0,75} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^{0,75} 0,1(200-x) dx = \left[ 0,1 \left( 200x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_0^{0,75} = 0,1 \left( 200 \cdot 0,75 - \frac{0,75^2}{2} \right) = 14,97 \text{ J}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 14,97}{0,005}} = 77,4 \text{ m/s}$$

4. Respuesta d) 58,3. El momento angular es constante, por lo que podemos plantear para afelio y perihelio

$$r_a m v_a = r_p m v_p \Rightarrow \frac{r_p}{r_a} = \frac{v_a}{v_p}$$

Para conocer la velocidad en el afelio utilizamos la 3ª Ley de Kepler (que maneja semieje mayor, no necesariamente radio ya que la órbita de Halley es elíptica) y el hecho de que la Tierra orbita respecto al Sol como el cometa Halley

$$\frac{T_{Halley}^2}{T_{Tierra}^2} = \frac{a_{Halley}^3}{a_{Tierra}^3} \Rightarrow a_{Halley} = a_{Tierra} \sqrt[3]{\frac{T_{Halley}^2}{T_{Tierra}^2}} = \sqrt[3]{\frac{75^2}{1^2}} a_{Tierra} = 17,8 \text{ UA}$$

Por geometría, para el cometa Halley  $r_a = 2 \cdot a_{Halley} - r_p = 35,1 \text{ UA}$

$$\text{Sustituyendo } \frac{r_p}{r_a} = \frac{35,1}{0,6} = 58,5$$

(Son datos reales y se pueden validar en [https://es.wikipedia.org/wiki/Cometa\\_Halley](https://es.wikipedia.org/wiki/Cometa_Halley))



5. Respuesta a) 8,92. Utilizando la 3ª Ley de Kepler, cuya expresión podemos deducir igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en órbitas circulares

$$R_o = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(9,84 \cdot 3600)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,97 \cdot 10^{27}}{4 \cdot \pi^2}} = 1,59 \cdot 10^8 m = 1,59 \cdot 10^5 km = 15,9(10^4 km) \quad 7$$

Se pregunta la altura

$$h = R_{\text{órbita}} - R_{\text{medio}} = 15,9 - 6,99 = 8,91 (10^4 km)$$

6. Respuesta d) 1,11. Igualando fuerza centrípeta y fuerza elástica, obtenemos el alargamiento

$$F_c = F_e \Rightarrow m \omega^2 R = k \cdot \Delta x \Rightarrow 1 \cdot 10^2 \cdot (1 + \Delta x) = 1000 \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{100}{900} = 0,11 m \Rightarrow R = 1,11 m$$

7. Respuesta a) 1357. Al unir las gotas estamos sumando cargas y volúmenes.

Usamos subíndice 1 para las gotas iniciales y 2 para la gota final

$$Q_2 = 50 \cdot Q_1$$

$$50 \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 \Rightarrow R_2 = \sqrt[3]{50} R_1 \approx 3,68 R_1$$

Utilizando la expresión de la carga de un condensador esférico  $C = 4 \pi \epsilon R$  y la definición de capacidad

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{50 \cdot \epsilon_1 V_1}{\sqrt[3]{50} \epsilon_1} = \frac{50 \cdot 100}{\sqrt[3]{50}} = 1357 V$$

8. Respuesta d) +2,0 k. Calculamos la fuerza magnética  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 20 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot q \vec{k} N$

Tiene dirección de eje z, sentido hacia z negativas. La fuerza eléctrica tiene que tener misma dirección y sentido opuesto, por lo que será hacia z positivas. Como la carga es positiva, fuerza y campo eléctrico tienen mismo sentido. En módulo  $F = qE \rightarrow E = F/q = 2 N$

>Dadas las opciones basta con elegir dirección y sentido correcto, no es necesario calcular módulo.

9. Respuesta a) 0,2. Si tomamos como eje x horizontal y eje y vertical, utilizando la regla de la mano derecha podemos ver dirección y sentido de campo creado por cada conductor.

Ángulo desde P hacia A y B =  $\arcsin(d/2d) = \arcsin(0,5) = 60^\circ$  (diagrama en enunciado parece indicar  $45^\circ$ )

A: Dirección eje y, sentido y positivas.

B: Dirección formando  $60^\circ$  con eje x, sentido de las agujas del reloj en el diagrama.

Los módulos son

$$B_A = \frac{\mu_0 I_A}{2 \pi d} = \frac{4 \pi 10^{-7} 1}{2 \pi 1} = 2 \cdot 10^{-7} T = 0,2 \mu T$$

$$B_B = \frac{\mu_0 I_B}{2 \pi 2d} = \frac{4 \pi 10^{-7} 2}{2 \pi 2} = 2 \cdot 10^{-7} T = 0,2 \mu T$$

El campo total tendrá como componente x la componente x de  $B_B$ , y como componente y la resta de  $B_A$  y la componente y de  $B_B$ .

$$B_{By} = B_B \cdot \cos 60^\circ = 0,1 \mu T; B_{Bx} = B_B \cdot \sin 60^\circ = 0,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \mu T = 0,1 \sqrt{3} \mu T$$

El módulo total

$$B = \sqrt{(0,1 \sqrt{3})^2 + (0,2 - 0,1)^2} = 0,2 \mu T$$

10. Respuesta c) 15,5. Utilizando la variación de la intensidad con la distancia, usando A para el punto asociado a 100 dB y B para el punto asociado a 80 dB.

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \Rightarrow \frac{I_0 10^{\frac{100}{10}}}{I_0 10^{\frac{80}{10}}} = \frac{(x+100)^2}{x^2} \Rightarrow 100 x^2 = x^2 + 200 x + 10000 \Rightarrow -99 x^2 + 200 x + 10000 = 0$$

$$x = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot (-99) \cdot 10000}}{2 \cdot (-99)} = \frac{-200 \pm 2000}{-198} = 11,1 m \quad \text{negativo}$$

Asumiendo propagación isotrópica con ondas esféricas

$$I_A = I_0 10^{\frac{100}{10}} = 10^{-2} W/m^2 \Rightarrow I_A = \frac{P}{4 \pi x^2} \Rightarrow P = I_A \cdot 4 \pi x^2 = 10^{-2} \cdot 4 \pi 11,1^2 \approx 15,5 W$$

11. Respuesta d)  $120^\circ$ . Al refractarse en el paso de aire  $\rightarrow$  agua el rayo se acerca a la normal, y tras reflejarse



en el fondo del acuario incidirá en el paso agua → aire con el mismo ángulo respecto a la normal, por lo que en la salida al aire volverá a formar 60° con la normal que es el ángulo con el que incidió.

12. Respuesta b) 7,9. Al formarse la imagen con el espejo cóncavo la consideramos invertida, y planteamos con aumento negativo (usamos expresiones que asumen aproximación paraxial, y convenio de signos según norma DIN 1335:  $s' = -30$  cm)

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{-300}{4} = -75 \quad \text{Para espejos} \quad A = \frac{-s'}{s} \Rightarrow s = \frac{-s'}{A} = \frac{-300}{75} = -4 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \Rightarrow R = \frac{2}{\frac{1}{-300} + \frac{1}{-4}} \approx -7,9 \text{ cm} \quad \text{Elegimos opción b tomando el módulo.}$$

### Problema de desarrollo D1.

Se trata de una composición de velocidades. Se debe expresar la distancia en función del ángulo con el que reme respecto al ángulo de la corriente (enunciado no aclara la dirección, simplemente indica que la canoa atraviesa el río); se podría pensar directamente en remar en dirección perpendicular a la orilla, pero eso minimizaría el tiempo, no la distancia recorrida. Se puede pensar que remando con cierto ángulo (sí que asumimos que se rema siempre en la misma dirección y sentido), remando “parcialmente contra de la corriente” se conseguirá que la barca se mueva de manera “más transversal” a la orilla y la distancia recorrida sea más cercana a los 100 m de ancho.

Tomamos eje x paralelo a la orilla, eje y perpendicular, y origen de coordenadas en el punto de partida. Tomamos ángulo  $\theta$  como el formado por el vector de velocidad de remado con el eje x.

Las ecuaciones de movimiento serán (t en s):

$$\text{Eje x: } x = v_x t = (7 \cdot \cos \theta + 10) \cdot t$$

$$\text{Eje y: } y = v_y t = 7 \cdot \sin \theta \cdot t$$

La distancia recorrida en un instante t es  $d = \sqrt{x^2 + y^2} = t \cdot \sqrt{(7 \cdot \cos \theta + 10)^2 + (7 \cdot \sin \theta)^2}$

$$d = t \cdot \sqrt{7^2 ((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) + 10^2 + 140 \cos \theta} = t \cdot \sqrt{149 + 140 \cos \theta}$$

Usamos el tiempo asociado a cruzar, cuando  $y = 100$  m  $100 = 7 \cdot \sin \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{100}{7 \cdot \sin \theta}$

$$\text{Combinando ambas expresiones} \quad d = \frac{100}{7} \frac{\sqrt{149 + 140 \cos \theta}}{\sin \theta}$$

Buscamos un mínimo

$$\frac{\partial d}{\partial \theta} = \frac{100}{7} \left( \frac{70 \cdot (-\sin \theta)}{\sqrt{149 + 140 \cos \theta}} \cdot \sin \theta - \frac{\sqrt{149 + 140 \cos \theta} \cdot \cos \theta}{(\sin \theta)^2} \right) = 0$$

$$-70 \sin^2 \theta - (149 + 140 \cos \theta) \cdot \cos \theta = 0$$

$$-70(1 - \cos^2 \theta) = 149 \cos \theta + 140 \cos^2 \theta$$

$$70 \cos^2 \theta + 149 \cos \theta + 70 = 0$$

Cambiamos variable  $z = \cos \theta$  y resolvemos la ecuación de 2º grado

$$z = \frac{-149 \pm \sqrt{149^2 - 4 \cdot 70 \cdot 70}}{2 \cdot 70} = \frac{-149 \pm 51}{140} = \frac{-1,42857}{-0,7}$$

Cualitativamente podemos ver que  $\theta = \arccos(-0,7) \approx 134^\circ$

$$\text{Sustituyendo} \quad d = \frac{100}{7} \frac{\sqrt{149 + 140(-0,7)}}{\sqrt{(1 - 0,7^2)}} \approx 143 \text{ m}$$

Podemos validar que si se remara transversalmente la distancia sería mayor  $d = \frac{100}{7} \frac{\sqrt{149}}{1} \approx 174 \text{ m}$

### Problema de desarrollo D2.

Si está en equilibrio el peso es igual al empuje. Dado que el equilibrio es totalmente sumergido, sabemos que la masa de agua desalojada es exactamente la masa de la esfera, por lo que podemos calcular su radio.

$$m = \rho_{\text{Agua}} \cdot V_{\text{esfera}} \Rightarrow 1,26 = 1000 \cdot \frac{4}{3} \pi R_{\text{ext}}^3 \Rightarrow R_{\text{ext}} = \sqrt[3]{\frac{1,26 \cdot 3}{4 \pi 1000}} = 0,0670 \text{ m} = 6,70 \text{ cm} \quad \text{Igualando empuje y}$$

peso (la densidad del aluminio es dato)

$$\rho_{\text{Al}} \left( \frac{4}{3} \pi R_{\text{ext}}^3 - \frac{4}{3} \pi R_{\text{int}}^3 \right) = 1,26 \Rightarrow R_{\text{int}} = \sqrt[3]{\left( \frac{1,26}{2699} - \frac{1,26}{1000} \right) \cdot \frac{(-3)}{4 \pi}} = 0,0574 \text{ m} = 5,74 \text{ cm}$$



### Problema de desarrollo D3.

a) La fuerza la obtenemos por superposición: realizamos un diagrama donde representamos los dos vértices con las cargas que llamamos  $q_1$  y  $q_2$ . Se puede ver que en el punto central del cuadrado se cancelan componentes y de la fuerza y la componente x, por la geometría, es el doble de la componente x asociada a una única carga.

Al ser todas las cargas negativas la fuerza es repulsiva, dirección y sentido según diagrama, y en módulo

$$|F| = 2K \frac{ee}{d^2} \cos 45^\circ = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(\sqrt{2})^2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|F| = 1,63 \cdot 10^{-28} \text{ N}$$

Vectorialmente  $\vec{F} = 1,63 \cdot 10^{-28} \vec{i} \text{ N}$

b) Se expulsa por el extremo opuesto al lado en el que están los electrones en vértices consecutivos, punto B del diagrama.

Se pregunta por trabajo realizado para expulsarlo: calculamos el trabajo realizado por el campo.

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -q \Delta V = -q(V(B) - V(A))$$

Calculamos la diferencia de potencial entre los puntos A y B, usando superposición.

$$V(A) = V_1(A) + V_2(A) = 2K \frac{e}{d_{1A}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1,6 \cdot 10^{-19})}{\sqrt{2}} = -2,036 \cdot 10^{-9} \text{ V}$$

$$V(B) = V_1(B) + V_2(B) = 2K \frac{e}{d_{1B}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1,6 \cdot 10^{-19})}{\sqrt{5}} = -1,288 \cdot 10^{-9} \text{ V}$$

$$W_{A \rightarrow B} = -(-1,6 \cdot 10^{-9}) \cdot (-1,288 \cdot 10^{-9} - (-2,036 \cdot 10^{-9})) = 1,197 \cdot 10^{-28} \text{ J}$$

Se trata de alejar una carga negativa de cargas negativas: es un trabajo a favor del campo y el trabajo realizado por el campo es positivo.

c) Utilizando el teorema de las fuerzas vivas, el trabajo realizado es igual a la variación de energía cinética, y como inicialmente estaba en reposo, igualamos la energía a energía cinética del electrón al salir del cuadrado.

$$\Delta E_c = W_{total} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = W \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,197 \cdot 10^{-28}}{9 \cdot 10^{-31}}} = 16,3 \text{ m/s}$$

### Problema de desarrollo D4.

a) Utilizamos ley de Faraday, planteando una expresión para el flujo.  $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  Tomamos eje x en el sentido de avance de la espira, tomando  $t=0$  en el instante en el que la espira empieza a abandonar la zona con campo magnético, por lo que  $x=v \cdot t$ . Al ser la espira plana perpendicular al campo y este uniforme en toda la espira podemos plantear  $\Phi = B \cdot a \cdot (b-x) = B \cdot a \cdot (b-v \cdot t)$

Usando la ley de Faraday  $\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = B \cdot a \cdot v$

Usando la ley de Ohm  $V = R \cdot I \Rightarrow B \cdot a \cdot v = R \cdot I \Rightarrow B = \frac{R \cdot I}{a \cdot v} = \frac{0,02 \cdot 0,2}{0,08 \cdot 6} = 0,0083 \text{ T} = 8,3 \text{ mT}$

>En este caso el dato de anchura b no se utiliza, estaría asociado al tiempo que dura la corriente inducida, que siendo a velocidad constante será  $t=b/v=0,2/6=0,033 \text{ s}$

>No se pide el sentido de la corriente, pero dado que el flujo disminuye al abandonar la región con campo, la corriente inducida será tal que intente oponerse a esa disminución, por lo que será en el sentido de las agujas del reloj en el diagrama.

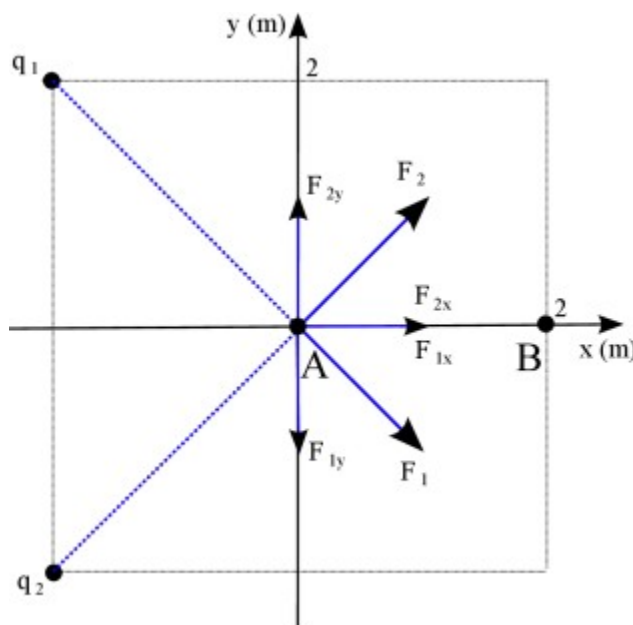
b) El planteamiento sería similar, pero ahora el lado de la espira que interviene en la expresión es b en lugar de a, y ahora se conoce el valor de B (el obtenido en apartado a) y se pide v.

$$B \cdot b \cdot v = R \cdot I \Rightarrow v = \frac{R \cdot I}{B \cdot b} = \frac{0,02 \cdot 0,2}{0,0083 \cdot 0,2} = 0,0083 \text{ T} = 2,4 \text{ m/s}$$

### Problemas de tratamiento de datos experimentales 1. Propagación de errores

a) Usamos análisis dimensional; L distancia, M masa, T tiempo, q temperatura

Enunciado indica unidades de  $\text{K}$  es  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ : la potencia  $W$  es energía por unidad de tiempo, y la energía





es trabajo, fuerza por desplazamiento, siendo la fuerza masa por aceleración, por lo que dimensionalmente la potencia es

$$W = \left[ \frac{M \cdot \frac{L}{T^2} \cdot L}{T} \right] = \left[ \frac{M \cdot L^2}{T^3} \right]$$

Aplicándolo a todo

$$Q = K \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{L} \Rightarrow \left[ \frac{M \cdot L^2}{T^3} \frac{1}{L} \right] \left[ L^2 \right] \left[ \frac{\frac{q}{E}}{E} \right] = \left[ \frac{M \cdot L^2}{T^3} \right]$$

Q tiene unidades de potencia (aunque el símbolo Q pueda sugerir simplemente unidades calor ó energía)

b) El valor es  $Q = K \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{L} = 401 \cdot 4,8 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{100}{1,2} = 16,04 \text{ W}$

Utilizamos propagación de errores asumiendo valor L exacto (no se indica incertidumbre en enunciado)

$$dQ = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial A} dA\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} dT\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial K} dK\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial A} \Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial K} \Delta K\right)^2}$$

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\left(K \frac{\Delta T}{L}\right) \Delta A\right)^2 + \left(\left(K \frac{A}{L}\right) \Delta T\right)^2 + \left(A \frac{\Delta T}{L} \Delta K\right)^2}$$

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\left(401 \cdot \frac{100}{1,2}\right) 0,1 \cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(\left(401 \frac{4,8 \cdot 10^{-4}}{1,2}\right) 0,5\right)^2 + \left(\left(4,8 \cdot 10^{-4} \frac{100}{1,2}\right) 1\right)^2} = 0,345976 \text{ W}$$

Al menos debemos expresar resultado con 2 cifras significativas que es el menor número de cifras significativas de los datos del enunciado  $Q = 16 \pm 1 \text{ W}$

Si la incertidumbre obtenida con propagación de errores hubiera sido mayor de 1 W, utilizaríamos la mayor.

c) Si queremos que la incertidumbre sea menor del 4 %, quiere decir que no puede ser mayor de  $16,04 \cdot 0,04 = 0,6416$ . Asumimos la misma incertidumbre en las otras medidas y planteamos la propagación de errores, pero ahora con tres términos

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial A} \Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \Delta L\right)^2}$$

$$\Delta Q^2 = \left(\left(K \frac{\Delta T}{L}\right) \Delta A\right)^2 + \left(\left(K \frac{A}{L}\right) \Delta T\right)^2 + \left(K A \Delta T \left(\frac{-1}{L^2}\right) \Delta L\right)^2$$

$$0,6416^2 = \left(\left(401 \cdot \frac{100}{1,2}\right) 0,1 \cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(\left(401 \frac{4,8 \cdot 10^{-4}}{1,2}\right) 0,5\right)^2 + \left(401 \cdot 4,8 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{100}{1,2^2} \cdot \Delta L\right)^2$$

$$0,29355 = 178,6678 \cdot (\Delta L)^2 \Rightarrow \Delta L = \sqrt{\frac{0,29355}{178,6678}} = 0,04053 \text{ m}$$

Utilizando una cifra significativa en la incertidumbre  $L = 1,20 \pm 0,04 \text{ m}$

### Problemas de tratamiento de datos experimentales 2. Ajuste lineal

a) Tomamos logaritmos en la expresión original  $v = \left(\frac{mg}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\log v = \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{mg}{K}\right) = \frac{1}{\alpha} \log(mg) - \frac{1}{\alpha} \log K$$

Tenemos una expresión lineal  $y = mx + n$ , donde  $y = \log(v)$ ,  $x = \log(mg)$

b, c y d) Representamos gráficamente, realizando las operaciones previas según transformación apartado a.

Usamos dato  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  dado en enunciados.

Contemplamos que los valores de masa respecto tabla original del enunciado hay que multiplicarlos por  $10^{-3}$  (en anotaciones de enunciados, se indicaría durante la prueba)

v (m/s)	2,2	1,99	1,9	1,71	1,29
m(g)	1,01E-01	7,48E-02	7,00E-02	5,12E-02	2,50E-02
log(v)	0,34242	0,29885	0,27875	0,23300	0,11059
log(m·g)	-3,00616	-3,13443	-3,16323	-3,29906	-3,61039

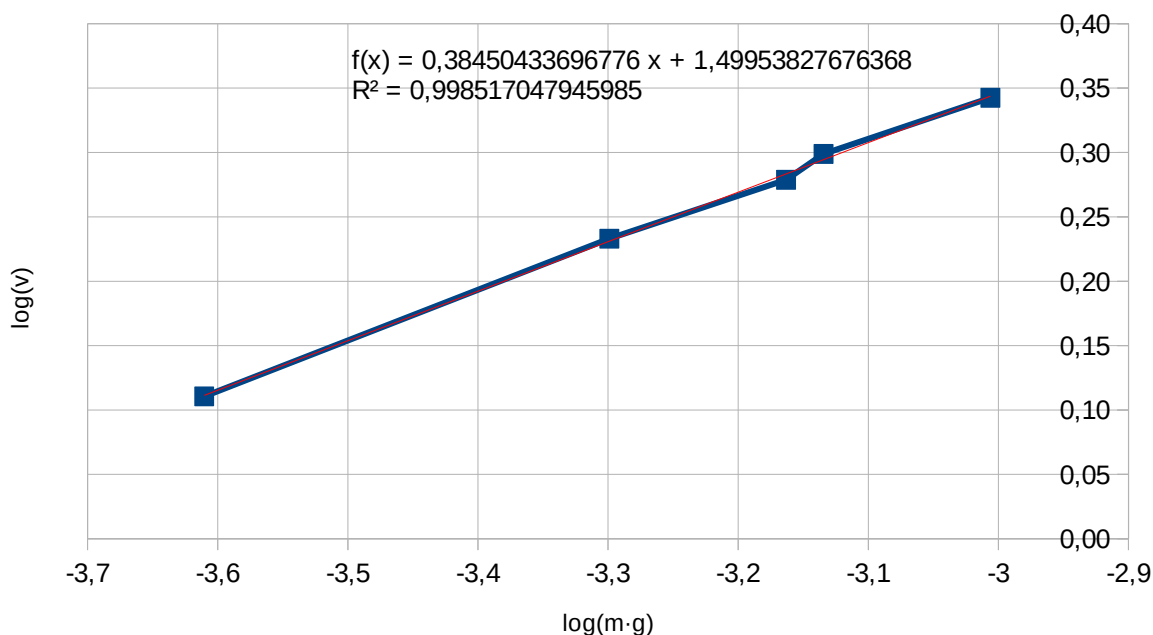
Vemos que es aproximadamente una recta

Realizamos el ajuste por mínimos cuadrados





<http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+%7B%7B-3.00616,+0.34242%7D,%7B-3.13443,0.29885%7D,%7B-3.16323,0.27875%7D,%7B-3.29906,0.23300%7D,%7B-3.61039,0.11059%7D%7D>



Vemos que se obtiene

$$\frac{1}{\alpha} = 0,384495$$

$$\alpha = \frac{1}{0,384495} \approx 2,60$$

$$\frac{1}{\alpha} \log K = 1,49951$$

$$\log K = 1,49951 \cdot \alpha$$

$$\log K = 1,49951 \cdot 2,600814$$

$$\log K = 3,8999$$

$$K \approx 7,941 \cdot 10^3$$

Tomando 3 cifras significativas como en los datos de enunciado (realmente habría que hacerlo a partir de información de la gráfica, de las desviaciones de los puntos respecto a la recta ajustada, asociado a estimar incertidumbre) tenemos

$$\alpha \approx 2,60$$

$$K \approx 7,94 \cdot 10^3$$

Enunciado indica acompañar dibujo de breve informe sobre la metodología utilizada; se trataría de indicar en qué consiste un ajuste por mínimos cuadrados y cómo se ha realizado el ajuste con la calculadora

fit	data	{{-3.00616, 0.34242}, {-3.13443, 0.29885}, {-3.16323, 0.27875}, {-3.29906, 0.233}, {-3.61039, 0.11059}}
	model	linear function

Least-squares best fit:

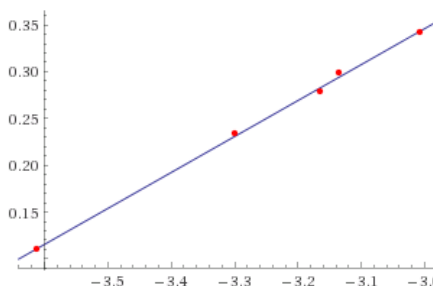
$$0.384495 x + 1.49951$$

Open

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R <sup>2</sup>	adjusted R <sup>2</sup>
-37.7198	-38.8915	0.998516	0.998021

Plot of the least-squares fit





### Madrid 2016

1. Respuesta c) 66,7. La velocidad media no es en este caso la media de velocidades, ya que ambos tramos son de 50 km, y se ha tardado tiempos distintos. En el primer tramo de 50 km a 40 km/h se ha tardado  $t=50/40 = 5/4$  h. La velocidad media  $50=100/(5/4+t) \rightarrow t=0,75$  h, en 2º tramo  $v=50/t=66,6$  km/h

2. Respuesta b) 4. Con los datos de altura y radio, el ángulo del eje del cono con la pared es de  $\arctan(50/100)=26,6^\circ$ . Para que la bola esté en equilibrio la componente de la normal vertical debe ser igual en módulo al peso. Esa componente vertical es  $N \cdot \sin(26,6^\circ)$ . La componente de la normal horizontal debe ser igual a la fuerza centrípeta, por lo que  $N \cdot \cos(26,6^\circ)=mR\omega^2$ . Como se pide altura, planteamos  $\tan(26,6^\circ)=R/h$   
 Sustituyendo valores:  $mg=N \cdot \sin(26,6^\circ) \rightarrow N=mg/\sin(26,6^\circ)$   
 $(mg/\sin(26,6^\circ)) \cdot \cos(26,6^\circ)=mR\omega^2 \rightarrow R=g/(\tan(26,6^\circ) \cdot \omega^2)=9,81/(\tan(26,6^\circ) \cdot (2\pi 5)^2)=0,01985$   
 $h=R/\tan(26,6^\circ)=0,0396 \approx 0,04$  m = 4 cm

3. Respuesta c) 1,27. Para volcarlo sin perder el contacto hay que elevar el centro de masas hasta que esté en el equilibrio inestable, lo que supone aportar energía potencial. Inicialmente apoyado en una cara el centro de masas está en  $1,25/2=0,625$  m. Cuando esté en equilibrio inestable sobre una arista formando la cara  $45^\circ$  con la horizontal, la altura del centro de masas es  $0,625 \cdot \sqrt{2}=0,884$  m

El trabajo asociado a aumentar la altura  $0,884-0,625=0,259$  m es  $E_p=mgh=0,5 \cdot 9,81 \cdot 0,259=1,27$  J

4. Respuesta d) 10,4. Aplicamos conservación del momento lineal para calcular la velocidad del sistema formado por ambas masas que quedan ligadas tras el choque  $0,01 \cdot 50=(0,01+0,05) \cdot v \Rightarrow v=8,33$  m/s  
 Aplicando el teorema de las fuerzas vivas  $\Delta E_c=W_{total}$  y considerando que la única fuerza que realiza trabajo es el rozamiento de la plastilina sobre el perdigón

$$W_{Froz}=\frac{1}{2}(0,01+0,05)8,33^2-\frac{1}{2}0,01 \cdot 50^2=-10,4$$

Como se indica trabajo que hace el perdigón, por tercera ley de Newton realiza una fuerza sobre la plastilina igual y en sentido opuesto, por lo que el trabajo cambia de signo.

Comentario: enunciado es extraño porque indica "bloque de plastilina... se queda incrustado... despreciando pérdidas caloríficas y el rozamiento", ya que si se queda incrustado es un choque inelástico, la energía cinética no se conserva y hay parte que se disipa en calor.

5. Respuesta c) 3,94. Aplicamos la tercera ley de Kepler, los cuadrados de los periodos son proporcionales al cubo del semieje mayor de la elipse.

$$\frac{T_{Venus}^2}{T_{cometa}^2}=\frac{R_{Venus}^3}{R_{cometa}^3} \Rightarrow R_{cometa}=R_{Venus} \sqrt[3]{\frac{T_{cometa}^2}{T_{Venus}^2}}=1,08 \cdot 10^6 \sqrt[3]{\frac{50^2}{(225/365)^2}}=2,02 \cdot 10^7$$

Aplicando que distancia en afelio y en perihelio suman el eje mayor de la elipse

$$r_{afelio}=2 \cdot R_{cometa}-r_{perihelio}=2 \cdot 2,02 \cdot 10^7-1,08 \cdot 10^6=3,93 \cdot 10^7$$

>Enunciado indica potencias de  $10^9$  km, pero se asume errata, con lo que respuesta sería c.

6. Respuesta b) 13630. Como se habla de radio asumimos órbitas circulares, la energía mecánica en la órbita tiene la expresión  $E_m=\frac{-1}{2} \frac{GMm}{R_o}$ . Al hablar de "enviarlos fuera del campo gravitatorio" implica hacer

que escapen, por lo que su energía mecánica sea cero. Si asumimos misma masa de ambos satélites, que el trabajo sea el doble implica que, llamando  $R_{o1}$  al radio de  $10^4$  km  $2 \frac{1}{2 R_{o2}}=\frac{1}{2 R_{o1}} \Rightarrow R_{o2}=2 R_{o1}$

Operando con los valores numéricos:

$$R_{o2}=20000 \text{ km} \Rightarrow h=R_{o2}-R_T=13630 \text{ km}$$

7. Respuesta a) 1,8. Para un oscilador  $E_m=\frac{1}{2} k A^2$ ,  $k=m\omega^2=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ ,  $E_m=\frac{1}{2} m 4 \pi^2 \frac{A^2}{T^2}$

Planteamos  $E_{m1}=E_{m2} \Rightarrow \frac{1}{2} m 4 \pi^2 \frac{A_1^2}{T^2}=\frac{1}{2} 2 m 4 \pi^2 \frac{A_2^2}{(T/2)^2} \Rightarrow A_1^2=8 A_2^2 \Rightarrow A_2=\frac{A_1}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{2\sqrt{2}} \approx 1,8$  cm

8. Respuesta a) 3.  $\beta=10 \log \frac{I}{I_0}$  Aplicando superposición y que los sonidos no son coherentes,

$$I_{total}=N \cdot I, \text{ luego } \beta_{total}=10 \log \left(N \frac{I}{I_0}\right)=10 \log N+10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow 84=10 \log N+79 \Rightarrow N=10^{\frac{84-79}{10}} \approx 3$$

9. Respuesta d) 288. Se habla de 3 cargas pero no se dan más que dos valores; el tercero lo debemos calcular aplicando superposición y usando el dato de que el potencial creado por las tres en (0,0) es 0 V.



$$V(0,0) = V(0,0)_{15nC(0,3)} + V(0,0)_{-15nC(4,3)} + V(0,0)_{Q(4,0)} = 0V$$

$$K \frac{15 \cdot 10^{-9}}{3} + K \cdot \frac{-15 \cdot 10^{-9}}{5} + K \cdot \frac{Q}{4} = 0$$

$$Q = 4 \cdot 15 \cdot 10^{-9} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = -8 \cdot 10^{-9} C$$

Calculamos el potencial de en (4,0) creado por las otras dos cargas:

$$V(4,0) = V(4,0)_{(0,3)} + V(4,0)_{(4,3)} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{15 \cdot 10^{-9}}{5} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-15 \cdot 10^{-9}}{3} = 9 \cdot 15 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = -18V$$

Como ahora vamos a mover Q, calculamos el potencial en (0,0) calculado por las otras dos sin contar Q

$$V(0,0) = V(0,0)_{(0,3)} + V(0,0)_{(4,3)} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{15 \cdot 10^{-9}}{3} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-15 \cdot 10^{-9}}{5} = 9 \cdot 15 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 18V$$

Se pide trabajo necesario para trasladar a la carga Q, asumimos que es trabajo realizado por el campo, por lo que  $W_{(4,0) \rightarrow (0,0)} = -\Delta E_p = -Q \Delta V = -(-8 \cdot 10^{-9})(18 - (-18)) = 288 \cdot 10^{-9} J$

**10.** Respuesta d) 72. En este caso la diferencia de potencial no está asociada necesariamente a variación de flujo, sino a fuerza ejercida sobre los electrones de la varilla, que acaba suponiendo una fuerza electromotriz y una diferencia de potencial; realmente  $\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ , y en este caso  $\varepsilon = Blv$  pero con lo visto

en física de 2º de Bachillerato se puede plantear cualitativamente que si hubiese “un rectángulo de conductor ideal sin resistencia e inmóvil que cerrase un circuito”, la fuerza electromotriz sería la misma, y en ese caso

$$\varepsilon = \left| \frac{-d\Phi}{dt} \right| = Bd \frac{d(l \cdot (x_0 + vt))}{dt} = Blv$$

**11.** Respuesta a) 35,6. Al ser un triángulo equilátero el ángulo que forman sus caras es 60°. Asumimos que el exterior del prisma es aire y tiene  $n=1$ . Se puede plantear un pequeño diagrama y ver casuísticas:

-Si el rayo incide por el lado de la normal opuesto al vértice superior, incide en la otra cara que no está horizontal, y en principio saldrá por esa cara a no ser que se produzca reflexión total en esa cara.

-Si el rayo incide por la lado de la normal más cercano al vértice superior, el rayo sale por la cara inferior, a no ser que se produzca reflexión total (sería un diagrama similar, solamente que el lado de la derecha sería la parte inferior “horizontal” que reposa sobre el suelo)

Si se produce reflexión total en la segunda cara, el ángulo de incidencia es

$$\text{sen}(i_2) \cdot n_2 = \text{sen}(90^\circ) \cdot n_1 \Rightarrow i_2 = \text{arcsen}\left(\frac{1}{1,6}\right) = 38,7^\circ$$

Si aplicamos trigonometría, en el triángulo formado por el rayo según cruza el prisma, conocemos un ángulo que es de 60°, otro que es  $(90-38,7)=51,3^\circ$ , por lo que el otro del triángulo es  $180-60-51,3=68,7^\circ$ , que es  $(90-r_1)$ , luego el ángulo refractado al entrar en el prisma desde el aire es  $21,3^\circ$ . Aplicando de nuevo la ley de Snell de refracción

$$\text{sen}(i_1) \cdot n_1 = \text{sen}(21,3^\circ) \cdot n_2 \Rightarrow i_1 = \text{arcsen}\left(\text{sen}(21,3^\circ) \cdot \frac{1,6}{1}\right) = 35,5^\circ$$

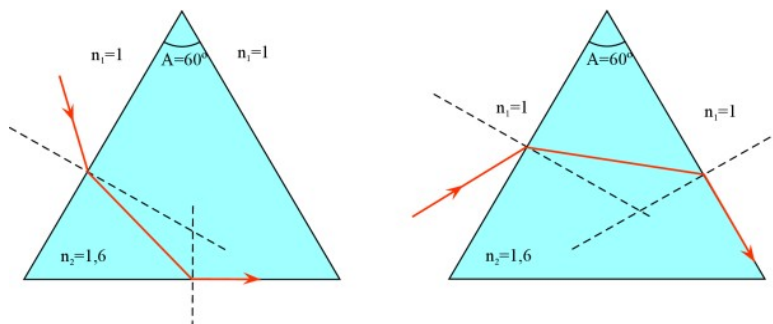
Enunciado dice “ángulo de incidencia sobre la cara lateral debe tener un valor mínimo”; ángulos de incidencia mayores no se produciría reflexión total, por lo que sería la figura de la izquierda del diagrama.

**12.** Respuesta c) -13,3. Si la imagen es menor y “derecha” (no invertida), se trata de una lente divergente. Según convenio DIN 1335 tiene distancia focal imagen negativa, potencia negativa, y la posición del objeto es negativa, por lo que  $s=-15$  cm. Utilizando la ecuación de lentes delgadas en m y el aumento

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = \frac{s}{3} \quad \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P \Rightarrow \frac{1}{-0,15/3} - \frac{1}{-15} = -13,3 \text{ dioptrías}$$

### Problema de desarrollo A.

La carga puntual en el centro positiva repele el protón y lo frena, y nos podemos plantear si la carga negativa del exterior también lo frena al atraerlo. Sin embargo, utilizando el teorema de Gauss, el campo eléctrico en una superficie esférica concéntrica con el centro de la esfera sería uniforme en módulo por simetría y





solamente dependería de la carga contenida, que es la interior. Por lo tanto la expresión de campo en el interior de la esfera es la misma que si fuera una carga puntual  $E = K \frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-9}}{r^2} = \frac{180}{r^2}$

El campo no es uniforme en el interior de la esfera, lo planteamos energéticamente, calculando la diferencia de energía potencial entre el poro de entrada a 0,5 m y el punto de parada a 0,25 m. Lo calculamos primero como potencial

$$\Delta V = \int_{0,5}^{0,25} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 180 \int_{0,5}^{0,25} \frac{-1}{r^2} dr = 180 \left[ \frac{1}{r} \right]_{0,5}^{0,25} = 180 \left[ \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,5} \right] = 360 \text{ V}$$

(es una diferencia de potencial positiva, un electrón se movería espontáneamente en esa dirección)

La variación de energía potencial para el protón  $\Delta E_p = q \Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 360 = 5,76 \cdot 10^{-17} \text{ J}$

Por conservación de energía es la energía cinética que tenía el protón en la entrada

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \Delta E_p}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,76 \cdot 10^{-17}}{1,7 \cdot 10^{-27}}} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

>El dato de la carga externa no lo utilizamos

### Problema de desarrollo B.

Como el campo magnético y la velocidad son perpendiculares, usando la ley de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$  vemos que inicialmente la fuerza estará dirigida hacia arriba, y en la zona con campo magnético describirá un arco de circunferencia cuyo radio podemos calcular

$$F_{mag} = F_{cent} \Rightarrow qvB = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 200 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 0,425 \text{ m}$$

El radio es mayor de los 20 cm de ancho de la región con campo magnético, por lo que sí sale de ella sin regresar por completar media circunferencia.

Llamamos A al punto de salida de la región con campo magnético, aplicando trigonometría en el diagrama se ve que angularmente ha recorrido un ángulo que tiene

$$\theta = \arcsen \frac{0,2}{0,425} = 28,07^\circ \text{ por lo que altura del punto A } h_A = 0,425 - 0,425 \cdot \cos(28,07^\circ) \approx 0,05 \text{ m}$$

El campo magnético no modifica el módulo de la velocidad, por lo que sabemos que el módulo de la velocidad en el punto A es el mismo, y a partir de ese momento describe un MRU hasta impactar con la pantalla en el punto B. Aplicando trigonometría

$$h_B = h_A + (0,3 - 0,2) \cdot \tan(\theta) = 0,05 + 0,1 \cdot \tan(28,07^\circ) \approx 0,10 \text{ m}$$

El punto de incidencia sería B (0, 30, 10) en cm.

### Problema de desarrollo C.

Representamos todas las fuerzas que actúan sobre el alambre; peso, normal y fuerza asociada a la corriente y el campo magnético según la ley de Laplace

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

Se indica que se mueve a velocidad constante, lo que implica que la aceleración es nula, por lo que aplicando la 2ª ley de Newton

(Lo habitual sería tomar eje x en sentido paralelo a la rampa del movimiento, y eje y perpendicular, pero como simplemente queremos igualar para que la suma sea cero, tomamos eje x horizontal y así solamente tenemos que descomponer N, en lugar de dos fuerzas.

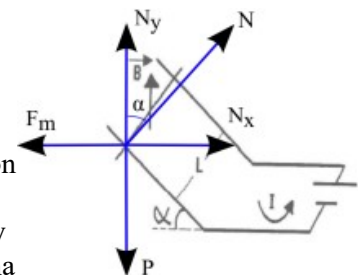
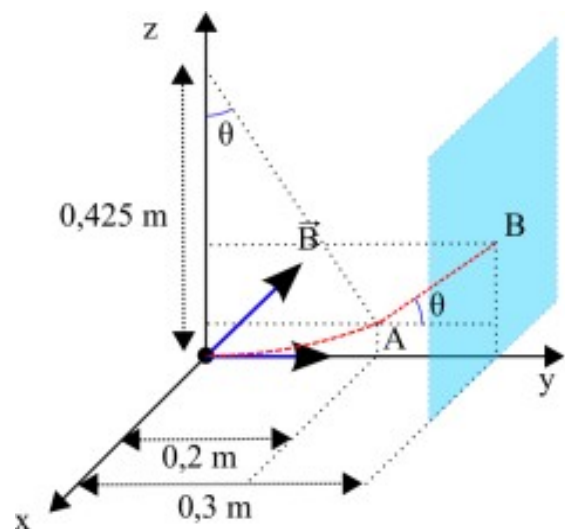
Eje y:  $N_y - P = 0 \Rightarrow N \cdot \cos(\alpha) = mg$

Eje x:  $N_x - F_m = 0 \Rightarrow N \cdot \sin(\alpha) = IlB$

Si combinamos ambas expresiones (dividimos la 2ª entre la 1ª)

$$\tan(\alpha) = \frac{IlB}{mg} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{10 \cdot 0,8 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{0,120 \cdot 9,81}\right) = 34,2^\circ$$

Se proporciona dato de corriente y no se proporcionan datos de resistencia, por lo que aunque varíe el flujo no tiene sentido plantear tensión y corriente inducida: se puede asumir que el dato de corriente dado es la





corriente total.

**Problema de desarrollo D.**

a) Planteamos la expresión del flujo, que en el caso de campo uniforme, superficie plana y campo perpendicular tenemos  $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \dots = B \cdot S = B \cdot \pi r^2$

En unidades de SI  $\Phi = 50 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot (3 - 0,02t)^2 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot (9 - 0,12t + 0,0004t^2) [Wb]$

Usando la ley de Faraday  $\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = -50 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot (-0,12 + 0,0008t) = 1,885 \cdot 10^{-2} - 1,257 \cdot 10^{-4} t$

Usando la ley de Ohm  $I = \frac{V}{R} = \frac{1,885 \cdot 10^{-2} - 1,257 \cdot 10^{-4} t}{5,0}$

Para  $t = 1,5 \text{ min} = 90 \text{ s}$   $I = \frac{V}{R} = \frac{1,885 \cdot 10^{-2} - 1,257 \cdot 10^{-4} \cdot 90}{5,0} \approx 1,5 \text{ mA}$

b) La energía disipada es  $E = P \cdot t$ , siendo P la potencia que para un circuito eléctrico es  $P = V \cdot I = V^2/R = RI^2$   
 Como la intensidad y la tensión varían con el tiempo, tenemos que plantear una integral

$$dE = P \cdot dt \Rightarrow E = \int_0^t P \cdot dt = \frac{1}{5} \int_0^t (1,885 \cdot 10^{-2} - 1,257 \cdot 10^{-4} t)^2 dt$$

$$E = \frac{1}{5} \int_0^t ((1,885 \cdot 10^{-2})^2 - 2 \cdot 1,885 \cdot 10^{-2} \cdot 1,257 \cdot 10^{-4} t + (1,257 \cdot 10^{-4})^2 t^2) dt$$

$$E = \frac{1}{5} \left( (1,885 \cdot 10^{-2})^2 t - \frac{(2 \cdot 1,885 \cdot 10^{-2} \cdot 1,257 \cdot 10^{-4})}{2} t^2 + \frac{(1,257 \cdot 10^{-4})^2}{3} t^3 \right)$$

$$E(t = 1,5 \text{ s}) = \frac{1}{5} \left( (1,885 \cdot 10^{-2})^2 1,5 - \frac{(2 \cdot 1,885 \cdot 10^{-2} \cdot 1,257 \cdot 10^{-4})}{2} 1,5^2 + \frac{(1,257 \cdot 10^{-4})^2}{3} 1,5^3 \right)$$

$$E(t = 1,5 \text{ s}) = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

**Problemas de simulación experimental 1. Propagación de incertidumbres**

Usando la expresión de F en función de v

$$F = \alpha v^2 + \frac{\beta}{v^2}$$

Para sustituir valores cambiamos de unidades v a m/s  $560 \text{ km/h} = 560/3,6 \text{ m/s}$ ,  $10 \text{ km/h} = 10/3,6 \text{ m/s}$

$$F = 0,30 \cdot \left(\frac{560}{3,6}\right)^2 + \frac{3,50 \cdot 10^5}{(560/3,6)^2} = 7273,72 \text{ N}$$

$$dF = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial v} dv\right)^2} \Rightarrow \Delta F = \frac{\partial F}{\partial v} \Delta v$$

$$\Delta F = \left(2\alpha v - 2\frac{\beta}{v^3}\right) \Delta v$$

$$\Delta F = \left(2 \cdot 0,30 \cdot \frac{560}{3,6} - 2 \cdot \frac{3,50 \cdot 10^5}{(560/3,6)^3}\right) \cdot \frac{10}{3,6} = 258,74267762660619803477 = 259 \text{ N}$$

Expresando el resultado con dos cifras significativas que es el menor número que tienen los datos del enunciado  $F = 7300 \pm 300 \text{ N}$

**Problemas de simulación experimental 2. Ajuste lineal**

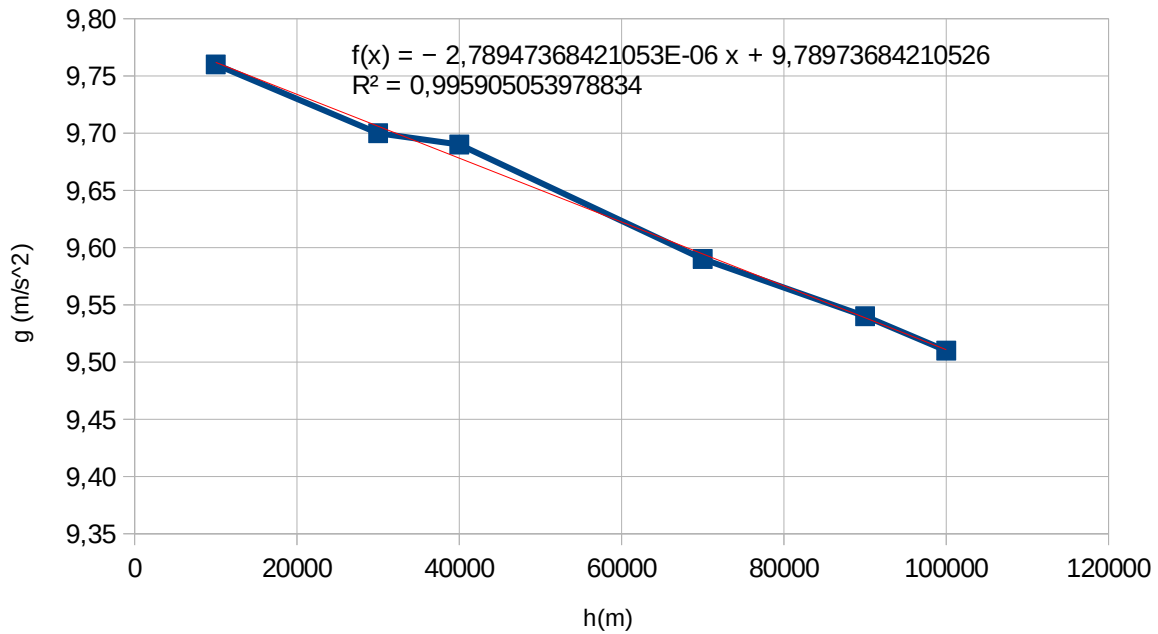
Buscamos si son necesarias transformaciones algebraicas para obtener una recta  $y = ax + b$

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) = -2 \frac{g_0}{R_T} h + g_0 \quad \text{Donde } y = g, x = h, a = -2g_0/R_T, b = g_0$$

Pasamos todas las magnitudes al Sistema Internacional y representamos

h(m)	10000	30000	40000	70000	90000	100000
g (m/s <sup>2</sup> )	9,76	9,70	9,69	9,59	9,54	9,51





Vemos que es aproximadamente una recta.

Realizamos el ajuste por mínimos cuadrados

<http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{10000,+9.76},{30000,9.70},{40000,9.69},{70000,9.59},{90000,9.54},{100000,9.51}}>

Se ve que se obtiene

$$b=g_0=9,78974 \text{ m/s}^2$$

$$a=-2g_0/R_T=-2,78947 \cdot 10^{-6}$$

Operando

$$R_T = -2 \frac{g_0}{a}$$

$$R_T = -2 \cdot \frac{9,78974}{-2,78947 \cdot 10^{-6}}$$

$$R_T = 7,019 \cdot 10^6 \text{ m}$$

En este caso no se pide la incertidumbre como en otros casos, podríamos usar sin más el menor número de cifras significativas de los datos del enunciado (3 para g, y 1 para h)

$$g_0 = 10 \text{ m/s}^2$$

$$R_T = 7 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Para calcular el error podríamos considerar los valores máximos y mínimos de la pendiente, que sobre la gráfica consideramos que se obtienen:

Con 30000 y 40000 por un lado

$$a = (9,69 - 9,7) / (40000 - 30000)$$

$$a = -1 \cdot 10^{-6}$$

Con 40000 y 70000 por otro

$$a = (9,59 - 9,69) / (70000 - 40000)$$

$$a = -3,33 \cdot 10^{-6}$$

Consideramos la incertidumbre en la pendiente como

fit	data	{{10 000, 9.76}, {30 000, 9.7}, {40 000, 9.69}, {70 000, 9.59}, {90 000, 9.54}, {100 000, 9.51}}
	model	linear function

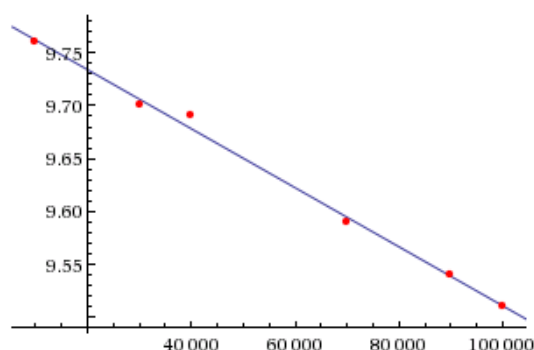
Least-squares best fit:

$$9.78974 - 2.78947 \times 10^{-6} x$$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R <sup>2</sup>	adjusted R <sup>2</sup>
-38.748	-39.3727	0.995905	0.994881

Plot of the least-squares fit:







$$\Delta p = \frac{1}{2} |p_{\max} - p_{\min}| \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} |-1 \cdot 10^6 - (-3,33 \cdot 10^{-6})| \Rightarrow \Delta p = 1,165 \cdot 10^{-6}$$

Con la incertidumbre de pendiente calculamos la incertidumbre del punto de corte de manera aproximada

Si  $a = p + \Delta p = -2,78947 \cdot 10^6 + 1,165 \cdot 10^{-6} = -1,62447 \cdot 10^{-6}$  Si lo utilizamos con el punto más alejado  $9,51 = -1,62447 \cdot 10^{-6} \cdot 100000 + b \rightarrow b_{\min} = 9,672447$

Si  $a = p - \Delta p = -2,78947 \cdot 10^6 - 1,165 \cdot 10^{-6} = -3,95447 \cdot 10^{-6}$  Si lo utilizamos con el punto más alejado  $9,51 = -3,95447 \cdot 10^{-6} \cdot 100000 + b \rightarrow b_{\max} = 9,905447$

$$R_{T\max} = -2 \cdot \frac{9,672447}{-1,62447 \cdot 10^{-6}} = 1,19 \cdot 10^7 \text{ m} \quad R_{T\min} = -2 \cdot \frac{9,905447}{-3,95447 \cdot 10^{-6}} = 5,01 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Aproximadamente (en el caso de el radio el error es excesivo, quizá podríamos haber descartado el punto 40000, 9,69 por estar muy lejos de la recta respecto a los demás.

$$g_0 = 9,8 \pm 0,1 \text{ m/s}^2 \quad R_T = 7 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^6 \text{ m}$$



### Madrid 2015

1. Respuesta c) 8. La diferencia de tiempo de finalización de los corredores es 3 min 32,57 s del más lento frente a 3 min 31,46 s del más rápido, 1,11 s. Ese tiempo es el que seguirá corriendo el corredor más lento a hasta llegar a la meta. Calculamos la velocidad del más lento  $v = \frac{1500}{3 \cdot 60 + 32,57} = 7,0565 \text{ s}$ . La distancia recorrida es  $e = v \cdot t = 7,0565 \cdot 1,11 = 7,8327 \text{ m}$

2. Respuesta a) 4781. Si llamamos A al punto más elevado y B al punto de contacto con el agua, la energía en ambos puntos será la misma, ya que no hay rozamiento. En el punto más alto A no tiene energía cinética, por lo que la energía será solamente potencial. Tomando como referencia  $h=0$  en la superficie del agua, tenemos que  $E_m(B) = E_m(A) = E_p(A) = mgh = 75 \cdot 9,81 \cdot (10 + 1,5) = 8461 \text{ J}$ . Si llamamos punto C al punto del interior del agua donde se detiene, tenemos que en ese punto solamente tiene energía potencial, y la variación de energía mecánica la podemos asociar al trabajo de la fuerza de frenado del agua.

$$\Delta E_m = W_{F_{nc}}$$

$$mgh_C - (E_m(B)) = F_{frenado} \cdot \Delta x \cdot (-1)$$

$$75 \cdot 9,81 \cdot (-2) - 8461 = -F_{frenado} \cdot 2 \Rightarrow F_{frenado} = 4966 \text{ N}$$

Tomamos la solución más próxima, a) 4781. El valor asociado a la solución b) 4321 se obtiene si no se considera que entre el punto B y C (al descender los 2 m dentro del agua) hay variación de energía potencial.

3. Respuesta d) 80. Al ser un lanzamiento parabólico, en el punto más alto de la trayectoria el vector velocidad será horizontal, y dado que no hay rozamiento podemos plantear que su módulo será igual a módulo horizontal inicial  $25,0 \cdot \cos(45^\circ) = 17,68 \text{ m/s}$ . En el momento de la explosión, utilizamos la conservación del momento lineal, tanto para las componentes horizontales x como verticales y. Al trozo de 100 g lo llamamos 1 y al otro trozo, de 200 g, lo llamamos 2, por lo que podemos plantear, sustituyendo valores

$$m \cdot v_x = m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} \Rightarrow 0,3 \cdot 17,68 = 0,1 \cdot v_{1x} + 0,2 \cdot v_{2x}$$

$$m \cdot v_y = m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} \Rightarrow 0,3 \cdot 0 = 0,1 \cdot v_{1y} + 0,2 \cdot v_{2y}$$

Como se nos indica que el primer trozo cae verticalmente y tarda 1,80 s en caer, calculamos desde qué altura lo hace para calcular  $v_{1y}$ . La altura es la asociada al punto más alto de la trayectoria, y se puede calcular teniendo en cuenta que es la misma altura que un lanzamiento vertical con  $v_y = 25,0 \cdot \sin(45^\circ) = 17,68 \text{ m/s}$

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 0 - 17,68^2 = 2 \cdot (-9,81) \cdot s \Rightarrow s = 15,93 \text{ m}$$

Para el trozo 1 en su caída podemos plantear

$$x = x_1 + v_{1y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow 0 = 15,93 + v_{1y} \cdot 1,80 + \frac{1}{2} \cdot (-9,81) \cdot 1,80^2 \Rightarrow v_{1y} = -0,0378 \text{ m/s}$$

> Aproximamos  $v_{1y} = 0$ , lo que implica que  $v_{2y} = 0$ , y resolvemos así. Luego validamos esta aproximación.

Como se nos indica que el primer trozo cae verticalmente, sabemos que  $v_{1x} = 0$ , por lo que podemos sustituir y  $0,3 \cdot 17,68 = 0,2 \cdot v_{2x} \Rightarrow v_{2x} = 26,52 \text{ m/s}$

Como hemos asumido  $v_{2y} = 0$ , el trozo 2 también tardará 1,8 s en caer, por lo que podemos calcular cuando espacio recorrerá horizontalmente desde el momento de la explosión:  $e = v \cdot t = 26,52 \cdot 1,80 = 47,74 \text{ m}$

Como se pide distancia desde el punto de disparo, y el lanzamiento fue con  $45^\circ$ , calculamos el espacio recorrido hasta el momento de la exposición; el tiempo que tarda en subir al punto más alto es el mismo tiempo que tarda en bajar con velocidad 0, que hemos asumido que son 1,80 s, pero lo podemos comprobar:  $v = v_0 + at \rightarrow 0 = 17,68 - 9,81t \rightarrow t = 1,80 \text{ s}$

En ese tiempo horizontalmente habrá recorrido  $e = v \cdot t = 17,68 \cdot 1,8 = 31,82 \text{ m}$

La distancia total es  $47,74 + 31,82 = 79,56 \text{ m}$

El resultado más próximo es d) 80 m

> Validamos la aproximación: si  $v_{1y}$  era negativo,  $v_{2y}$  sería positivo, y habría hecho una parábola con un alcance ligeramente mayor. Como la opción de valor más alto de las posibles es d) 80, es correcto asumir como válido el resultado, ya que no puede ser un alcance menor.

4. Respuesta b) 8,3. Llamamos punto A al punto más alto y B al punto más bajo en superficie, igualando energías mecánicas al no haber rozamiento

$$E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow -GM \frac{m}{(R+R)} = -GM \frac{m}{R} + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{GM}{2R} = \frac{v^2}{2}$$

No tenemos como datos G y M, pero podemos plantear que  $g = GM/R^2 \rightarrow GM = gR^2$

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{11,5 \cdot 6 \cdot 10^6} = 8307 \text{ m/s} = 8,3 \text{ km/s}$$

5. Respuesta d) 4/3. El trabajo está asociado a la variación de energía potencial, por lo que igualando.



$$\frac{-GM_A \cdot 1}{(R+R)} - \left(\frac{-GM_A \cdot 1}{R}\right) = \frac{-GM_B \cdot 1}{R+2R} - \left(\frac{-GM_B \cdot 1}{R}\right)$$

$$\frac{GM_A}{2R} = \frac{2}{3} \frac{GM_B}{R} \Rightarrow M_A = \frac{4}{3} M_B$$

Como  $m=d \cdot v$ ,  $v=(4/3)\pi R^3$ , y ambos planetas tienen el mismo radio, la relación entre masas es la misma que entre densidades, por lo que  $d_A/d_B=4/3$ .

6. Respuesta b) 3. Como el muelle es el mismo, tiene una constante elástica única, y podemos plantear

$$K = m_1 \cdot \omega_1^2 = m_1 \cdot (2\pi 10)^2$$

$$K = (m_1 + m_2) \cdot \omega_2^2 = (m_1 + m_2) \cdot (2\pi 5)^2$$

$$m_1 \cdot 100 = (m_1 + m_2) \cdot 25 \Rightarrow 100 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) 25 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{100 - 25}{25} = 3$$

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{103}{10}} = 0,02 \text{ W/m}^2$$

7. Respuesta c) 36,2.  $I = \frac{P}{S} \Rightarrow P = I \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = 0,02 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 3,8^2 = 3,63 \text{ W}$

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow E = P \cdot t = 36,3 \text{ J}$$

8. Respuesta a) 0,05. La carga de cada una se distribuye de manera uniforme en su superficie. Al contactar las esferas con un conductor de capacidad despreciable, éste no retiene carga, y la se distribuye carga entre ambas, y en el nuevo equilibrio ambas se encuentran al mismo potencial.

La carga total es  $7 \text{ nC} - 19 \text{ nC} = -12 \text{ nC}$

No necesitamos cálculos para calcular la distribución de carga: ambas son iguales, tienen la misma capacidad, por lo que en equilibrio cada una tendrá la mitad de carga,  $-6 \text{ nC}$ . Una vez que las esferas tengan cada una esa carga, se repelerán entre ellas, produciendo tensión en el cable. Para calcular la tensión asumimos modelo puntual: asumimos toda la carga de cada esfera situada en su centro, y como no se da el radio de la esfera y se indica que es pequeña, lo ignoramos

Utilizando la ley de Coulomb  $F = K \frac{Q_1 Q_2}{R^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-9} \cdot -6 \cdot 10^{-8}}{0,008^2} = 0,005 \text{ N}$

La opción más próxima es a) 0,05.

9. Respuesta c) 5,6. Si realizamos un diagrama podemos razonar que el campo generado por el conductor en (0,-3) va dirigido hacia x positivas, y que el campo generado por el conductor en (4,0) hacia y positivas, y es este segundo el que hay que anular para conseguir lo indicado en el enunciado.

El conductor situado en (4,-3) tendrá que tener una corriente dirigida hacia z positivas, de modo que genere un campo que tenga componente x negativa y componente y negativa.

Igualando componente positiva del campo generado por conductor en (0,-3) y componente negativa del campo generado por conductor en (4,-3), que se encuentra a una distancia de 5 m que se calcula con Pitágoras. Para proyectar el campo generado por el conductor en (4,-3) sobre el eje x multiplicamos por el

coseno, que se puede razonar que es igual a 3/5.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi 5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{\mu_0 2}{2\pi 3} \Rightarrow I = \frac{50}{9} = 5,6 \text{ A}$

10. Respuesta c) 90. El enunciado no indica que haya un conductor en el origen que cierre el circuito (o que ambos conductores se crucen en el origen) y que haga que al desplazarse la varilla aumente la superficie y el flujo, hacemos planteamiento general. Si realizamos un diagrama asumiendo lo anterior podemos razonar que la superficie es un trapecio  $S=l \cdot x + x \cdot x \cdot \tan(15^\circ)/2 = x(l + x \cdot \tan(15^\circ)/2)$ , siendo l la separación entre raíles en el origen. Se indica que la varilla móvil parte del origen, por lo que  $x=v \cdot t$ .

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\alpha) = B \cdot v \cdot t (l + v \cdot t \cdot \tan(15^\circ)/2) = B \cdot v \cdot (l \cdot t + v \tan(15^\circ) t^2/2)$$

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = -B \cdot v (l + v \tan(15^\circ) \cdot t)$$

$$\varepsilon(t=5 \text{ s}) = 0,42 \cdot 0,40 (l + 0,40 \cdot \tan(15^\circ) \cdot 5) = [ \text{expresado en V} ] = 168 \cdot l + 90 [ \text{expresado en mV} ]$$

No se indica la separación entre raíles, así que si asumimos  $l=0 \text{ m}$  (se cruzan en origen), la respuesta es c)

11. Respuesta a) 0,38. Asumimos que al hablar de  $\alpha$  en el enunciado se hace referencia al ángulo de incidencia en cada caso: de A a B y de B a C, y lo que se está dando es el ángulo límite en cada caso.

Planteamos una reflexión total entre el medio A y B  $n_A \cdot \sin(50^\circ) = n_B \cdot \sin(90^\circ) \Rightarrow n_B = n_A \cdot \sin(50^\circ)$



Planteamos una reflexión total entre el medio B y C  $n_B \cdot \sin(30^\circ) = n_C \cdot \sin(90^\circ) \Rightarrow n_B = \frac{n_C}{\sin(30^\circ)}$

Igualando  $n_A \cdot \sin(50^\circ) = \frac{n_C}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow \frac{n_C}{n_A} = \sin(50^\circ) \cdot \sin(30^\circ) = 0,38$

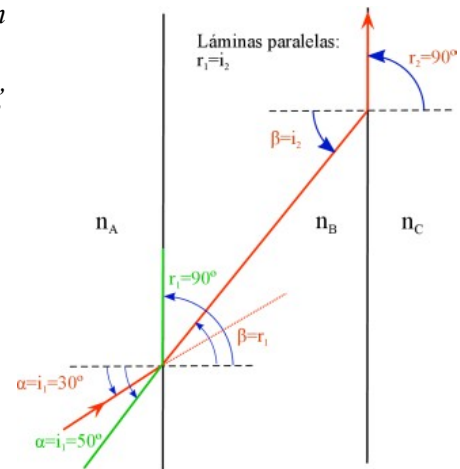
*Comentario: enunciado es confuso porque indica "incide en B con un ángulo  $\alpha$ , ... y en C entraría solamente si  $\alpha < 30^\circ$ " Si interpretamos literalmente el enunciado,  $\alpha$  está asociado solamente al paso de A a B,  $n_B < n_A$  y hay reflexión total con un ángulo  $\alpha = 50^\circ$ , y si el ángulo  $\alpha = 30^\circ$  no hay reflexión total en paso de A a B, pero sí en paso de B a C. Con esa interpretación la reflexión total entre A y B nos da la misma expresión, pero para la refracción en el paso de A a B y luego reflexión total en paso de B a C (llamamos  $\beta$  al ángulo de incidencia en C desde B) nos daría:*

De A a B, :  $n_A \cdot \sin(30^\circ) = n_B \cdot \sin(\beta)$

De B a C:  $n_B \cdot \sin(\beta) = n_C \cdot \sin(90^\circ) \Rightarrow n_B \cdot \sin(\beta) = n_C$

Combinando:  $n_A \cdot \sin(30^\circ) = n_C \Rightarrow \frac{n_C}{n_A} = 0,5$  que no es ninguna de

las soluciones propuestas.



**12.** Respuesta d) 93,3. Utilizando el convenio de signos DIN,  $s = -20,0$  cm. En el caso de espejo plano,  $s'_{\text{espejo}} = -20,0$  cm. Como esa imagen está 15 cm más cerca del espejo, la imagen inicial estaba en  $s' = 35$  cm. Utilizando la ecuación de espejo

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{35} + \frac{1}{(-20)} = \frac{2}{R} \Rightarrow R = -2 \cdot 46,7 = 93,3 \text{ cm}$$

**Problema 1.**

Teoría (máximo 5 líneas): la partícula que cae deja de estar en contacto cuando tiene cierta velocidad y la componente de la fuerza de la gravedad que curva la trayectoria no es lo suficientemente grande y deja de haber normal. Se considera partícula puntual; no se gasta energía en hacerla rodar sobre su eje mientras cae sobre la semiesfera. El punto superior es un equilibrio inestable, pero se asume que comienza con  $v=0$ . Cálculos (1 folio): si realizamos un diagrama del instante en el que se pierde el contacto, la partícula lleva cierta  $v$ , está "en contacto pero sin normal" habiendo recorrido un ángulo desde la vertical  $\theta$ , y descendido hasta una altura  $h$ . En cualquier momento la altura respecto al plano horizontal XY es  $h = R \cdot \cos(\theta)$ .

Se puede razonar que justo en ese instante la componente radial de la fuerza de la gravedad es la fuerza centrípeta, y que esa componente radial es  $F = mg \cdot \cos(\theta)$ .

Si igualamos a la fuerza centrípeta

$$F_c = F_{\text{gradial}} \Rightarrow m \frac{v^2}{R} = m g \cos(\theta) \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g \frac{h}{R}$$

Para calcular la relación entre  $h$  y  $v$ , utilizamos la conservación de energía mecánica entre el punto superior y el punto a altura  $h$ , cuando ha descendido una altura  $R-h$ .

$$m g R = m g h + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow g(R-h) = \frac{v^2}{2}$$

Igualando  $g h = 2 g(R-h) \Rightarrow h + 2 h = 2 R \Rightarrow h = \frac{2}{3} R = \frac{2}{3} 6,0 = 4,0 \text{ m}$

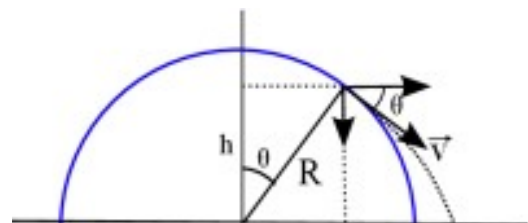
Una vez calculada esta altura, calcular la distancia a la base de la semiesfera del punto en el que impacta en el plano XY es realizar los cálculos asociados a un tiro parabólico, con velocidad inicial dirigida hacia abajo con un ángulo igual a  $\theta = \arccos(4/6) = 48,19^\circ$ . Tomamos referencia  $z=0$  en el plano xy.

El módulo de velocidad inicial es  $v = \sqrt{gh} = \sqrt{9,81 \cdot 4} = 6,26 \text{ m/s}$

$$z = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow 0 = 4 - 6,26 \cdot \sin(48,19^\circ) \cdot t + \frac{1}{2} (-9,81) \cdot t^2 \Rightarrow -4,905 t^2 - 4,67 t + 4 = 0$$

$$t = \frac{4,67 \pm \sqrt{(4,67)^2 - 4 \cdot (-4,905) \cdot 4}}{2 \cdot (-4,905)} = \frac{4,67 \pm 10,01}{-9,81} = \frac{-1,5}{0,55} \text{ s}$$

Horizontalmente habrá recorrido:  $x = v \cdot t = 6,26 \cdot \cos(48,19^\circ) \cdot 0,55 = 2,30 \text{ m}$





Como se pide la distancia a la base de la semiesfera, calculamos cual era la distancia inicial:

$$x = 6 \cdot \sin(48,19^\circ) = 4,47 \text{ m}$$

La distancia total al centro de la semiesfera sería  $4,47 + 2,30 = 6,77 \text{ m}$ , pero como se pide a la base de la semiesfera de radio 6 m, sería 0,77 m. Cualitativamente podemos validar que debe ser un punto cercano.

### Problema 2.

Teoría (máximo 5 líneas): la componente de velocidad paralela al campo no es alterada, y la componente perpendicular hace que describa una trayectoria circular, por lo que la trayectoria es helicoidal. Se puede hacer analogía con movimiento cargas en auroras boreales, pero aquí el campo magnético es uniforme.

Asumimos que el haz tiene su eje paralelo al campo: los electrones cercanos al centro de haz describen círculos pequeños, y los exteriores mayores, pero el tiempo de giro es el mismo  $R = mv/qB$ ,  $\omega = v/R = qB/m$ .

Cálculos (máximo 1 folio): se indica un ángulo de  $30^\circ$  que tomamos como el ángulo en el vértice del cono, por lo que será el doble del ángulo que forma el vector velocidad de los electrones más externos del haz con el campo magnético. Por lo tanto el módulo de la componente de velocidad perpendicular al campo será  $v \cdot \sin(15^\circ)$ .

Se indica energía y haz de electrones, pero tomamos la energía asociada a cada electrón. Si utilizamos conservación de la energía, la velocidad del electrón es la asociada a la diferencia de potencial con la que ha sido acelerado, inicialmente desde el reposo:

$$E_c = |q|V = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|q|V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100 \cdot 10^3}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 1,874 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

La componente radial perpendicular al campo será  $1,874 \cdot 10^8 \cdot \sin(15^\circ) = 4,85 \cdot 10^7 \text{ m/s}$

La componente paralela al campo será  $1,874 \cdot 10^8 \cdot \cos(15^\circ) = 1,81 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Para el radio de curvatura utilizamos solamente la componente perpendicular al campo

$$\text{Igualando fuerza magnética y centrípeta } m \frac{v^2}{R} = |q|vB \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 4,85 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,01} = 0,028 \text{ m}$$

Validamos a nivel de física de 2º de Bachillerato, la velocidad es próxima a la de la luz en el vacío, es

$$\text{relativista, ya que } \beta = \frac{v}{c} = \frac{1,874 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 0,62 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,62^2}} \approx 1,27$$

La resistencia del electrón a ser acelerado a altas velocidades es mayor, lo que se puede interpretar cualitativamente como que su masa inercial es mayor "masa relativista", y alcanzaría una velocidad algo menor, ya que en ese cálculo de velocidad de ha asumido  $m$  constante y con el valor de reposo.

Por lo tanto

$$E_c = |q|V = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$\frac{|q|V}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{|q|V}{m_0 c^2} + 1} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \left( \frac{1}{\frac{|q|V}{m_0 c^2} + 1} \right)^2 - 1 = \frac{-v^2}{c^2}$$

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{|q|V}{m_0 c^2} + 1} \right)^2} = 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100 \cdot 10^3}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} + 1} \right)^2} = 1,64 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

(Validación lógica del resultado: menor, aumenta inercia y no se acelera tanto)

Con ese nuevo valor tenemos para el módulo global de la velocidad

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1,64 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 0,55 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,55^2}} = 1,20$$

La componente radial perpendicular al campo será  $1,64 \cdot 10^8 \cdot \sin(15^\circ) = 4,24 \cdot 10^7 \text{ m/s}$

La componente paralela al campo será  $1,64 \cdot 10^8 \cdot \cos(15^\circ) = 1,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$m \frac{v^2}{R} = |q|vB \Rightarrow R = \frac{\gamma m_0 v}{|q|B \sin(\theta)} = \frac{1,20 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 4,24 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,01} = 0,029 \text{ m}$$

Ese será el radio asociado a los electrones más externos del haz, para los electrones más internos el radio será menor.

Calculamos el periodo de giro, el tiempo para completar una circunferencia, que es el mismo para todos los

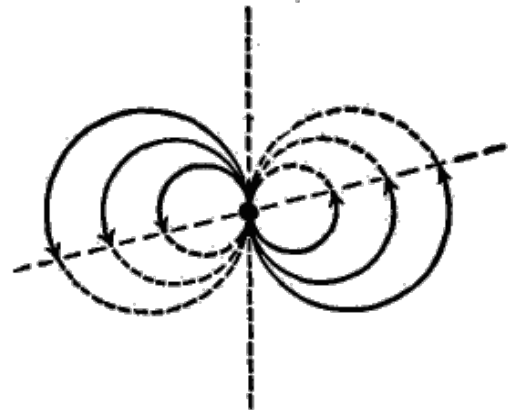


electrones del haz

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m} = \frac{|q|B}{\gamma m_0} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,01}{1,20 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 1,46 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1,46 \cdot 10^9} = 4,3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Si representamos la trayectoria de los electrones desde su eje, tendremos algo similar a la figura (no se indica el ancho del cono, pero podemos asumir que el valor del campo está ajustado para que haya un “enfoco” en el que los electrones quedan suficientemente juntos. No tenemos en cuenta la repulsión entre los electrones por el hecho de estar muy próximos al enfocar el haz.



Magnetic Focusing

[http://www.vias.org/basicradio/basic\\_radio\\_22\\_09.html](http://www.vias.org/basicradio/basic_radio_22_09.html)

De acuerdo al diagrama, calculamos el tiempo que los electrones recorren media circunferencia, que será el mismo para todos ellos, y con ese tiempo calculamos la distancia recorrida en la dirección del haz.

El tiempo en recorrer media circunferencia es

$$T_{1/2 \text{ circunferencia}} = 4,3 \cdot 10^{-9} = 22,15 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Si utilizamos la velocidad en sentido paralelo al campo,  $e = v \cdot t = 1,58 \cdot 10^8 \cdot 2,15 \cdot 10^{-9} = 0,34 \text{ m} = 34 \text{ cm}$

### Problema 3.

Teoría (máximo 5 líneas): como las esferas son concéntricas, utilizando el teorema de Gauss podemos calcular el campo creado en su exterior, que depende solamente de la carga interior, y por simetría sabemos que es radial, y las superficies equipotenciales son esferas. Necesitamos calcular potencial para calcular trabajo, por lo que usamos la expresión de capacidad de una esfera cargada cilíndrico, con lo que podremos calcular el potencial en cada esfera.

Cálculos (máximo 1 folio): Llamamos punto A al situado a 50 cm y B al situado a 80 cm.

Utilizando la expresión de la capacidad de una esfera cargada  $C=4\pi\epsilon_0 R$ , y  $C=Q/V$ ,  $V=Q/C$ , planteamos teniendo en cuenta que el dato el enunciado es  $K=1/4\pi\epsilon_0$

$$V_{\text{interior}} = K \frac{Q_{\text{interior}}}{R_{\text{interior}}} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-9}}{0,3} = 90 \text{ V} \quad V_{\text{exterior}} = K \frac{Q_{\text{exterior}}}{R_{\text{exterior}}} = 9 \cdot 10^9 \frac{-10 \cdot 10^{-9}}{1} = -90 \text{ V}$$

No se pide la diferencia de potencial entre las dos esferas (30 y 100 cm), sino entre dos internas (50 y 80 cm)

Se podría plantear calcular  $V$  integrando  $E$  entre los puntos, pero lo planteamos de otra manera; por la simetría asumimos que el potencial es constante en superficies concéntricas, y que su dependencia con el radio es  $1/r$  al igual que para una carga puntual, por lo que podemos plantear que sigue una ecuación

$$V = a + b \cdot 1/r$$

$$V(r=r_{\text{interior}}) = 90 = a + b/0,3$$

$$V(r=r_{\text{exterior}}) = -90 = a + b/1$$

Si restamos primera menos segunda:

$$180 = b \cdot (1/0,3 - 1) \rightarrow b = 77,14$$

Sustituyendo en la segunda  $a = -90 - 77,14 = -167,14$

Por lo que tenemos una expresión para  $r$  con valores intermedios que en los extremos tiene los valores dados:

$$V(r) = -167,14 + \frac{77,14}{r} \quad [\text{para } 0,3 < r < 1 \text{ m}]$$

Validamos:  $V(r=0,3 \text{ m}) = 90 \text{ V}$ ,  $V(r=1 \text{ m}) = -90 \text{ V}$

Calculamos ahora el potencial en los dos puntos indicados

$$V(B) = -167,14 + \frac{77,14}{0,8} = -70,72 \text{ V} \quad V(A) = -167,14 + \frac{77,14}{0,5} = -12,86 \text{ V}$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -70,72 - (-12,86) = -57,86 \text{ V}$$

$$W_{A \rightarrow B} = -q \Delta V = -(-7 \cdot 10^{-6}) \cdot (-57,86) = -4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

El trabajo realizado por el campo eléctrico es negativo: la diferencia de potencial es negativa, va hacia potencial menor (número negativo más grande), y se trata de una carga negativa. El trabajo es en contra del campo, no lo realiza el campo.

Referencias: [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Condensador\\_esf%C3%A9rico](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Condensador_esf%C3%A9rico)

[http://laplace.us.es/wiki/index.php/Superficies\\_esf%C3%A9ricas\\_conc%C3%A9ntricas\\_cargadas](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Superficies_esf%C3%A9ricas_conc%C3%A9ntricas_cargadas)

<http://www.fiquipedia.es/home/recursos/recursos-para-oposiciones/2001-Catalu%C3%B1a-ProblemaC2.pdf?>



[attredirects=0](#)

### Problema experimental 1.

a) Como la expresión es exponencial, para obtener la expresión de una recta tomamos logaritmo, con lo que llegamos a  $\ln(A)=\ln(A_0)-t/\tau$ , donde podemos llamar  $y=\ln(A)$ ,  $x=t$ , por lo que tenemos una recta  $y=ax+b$  siendo  $a=-1/\tau$  y  $b=\ln(A_0)$ .

b) Realizamos los cálculos teniendo en cuenta que las medidas de cuentas son número de desintegraciones durante 1 minuto.

t(horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Cuentas	997	520	265	127	70	35	16	7	3
t(s)	0	3600	7200	10800	14400	18000	21600	25200	28800
A (emis/s)	16,6	8,67	4,42	2,12	1,17	0,58	0,27	0,12	0,05
ln(A)	2,81	2,16	1,49	0,75	0,15	-0,54	-1,32	-2,15	-3,00

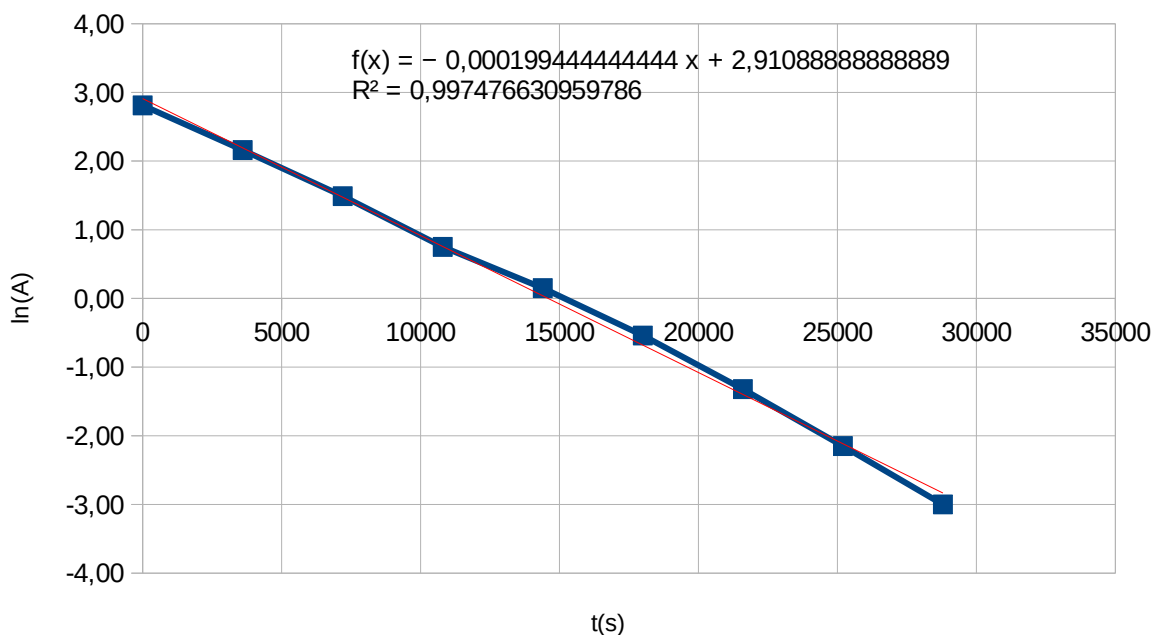
Si lo representamos gráficamente vemos que sí se ajusta a una recta

(en la hoja inicial de la prueba indica “El problema 1 se resolverá en dicha hoja de papel milimetrado”)

c) Para trazar la recta de ajuste realizamos el ajuste por mínimos cuadrados, utilizando la función estadística de la calculadora (ver resolución problema experimental Madrid 2013)

Si lo realizamos con wolframalpha <http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+>

<http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{0%2C2.81}%2C{3600%2C2.16}%2C{7200%2C1.49}%2C{10800%2C0.75}%2C{14400%2C0.15}%2C{18000%2C-0.54}%2C{21600%2C-1.32}%2C{25200%2C-2.15}%2C{28800%2C-3.00}}>



Se ve que

$a = -1/\tau = -0,000199444$ , luego la vida media (vida promedio) es  $\tau = 5013,9... s$

Para calcular la incertidumbre reutilizamos la idea indicada en la solución de Aragón 2011: "Cuando se quiere hacer una estimación manual de la incertidumbre de una pendiente, normalmente se trazan las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a la serie de puntos experimentales y se obtiene la incertidumbre como

$$\Delta p = \frac{1}{2} (p_{\text{máx}} - p_{\text{mín}})$$

Viendo la gráfica tomamos pendiente máxima entre los quinto y noveno punto, y pendiente mínima entre el primero y el quinto.

$$p_{\text{máx}} = (-3,00 - 0,15) / (28800 - 14400) = -0,00021875 \text{ s}^{-1}$$

$$p_{\text{mín}} = (0,15 - 2,81) / (14400) = -0,0001847 \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} (-0,0002187524 - (-0,0001847)) = -1,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}^2$$

Podemos plantear  $p = -1/\tau \rightarrow \tau = -1/p$

$$\Delta \tau = \frac{\partial \tau}{\partial p} \cdot \Delta p = \frac{1}{p^2} \cdot \Delta p = \frac{1}{(-0,000199444)^2} \cdot (-1,7 \cdot 10^{-5}) = 427 \text{ s}$$

Indicamos el error con una única cifra significativa y llegamos a

$$\tau = 5000 \pm 400 \text{ s}$$

### Problema experimental 2.

a) Utilizamos la expresión para lentes delgadas, y convenio de signos DIN 1335;  $s = -15,00 \text{ cm}$ ;  $s' = 30,20 \text{ cm}$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{30,20} - \frac{1}{-15} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = 10,02 \text{ cm}$$

b) Expresamos  $f'$  en función de las otras variables,  $s$  y  $s'$

$$f' = \frac{1}{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s}} = \frac{s' \cdot s}{s - s'}$$

fit	data	{0, 2.81}, {3600, 2.16}, {7200, 1.49}, {10800, 0.75}, {14400, 0.15}, {18000, -0.54}, {21600, -1.32}, {25200, -2.15}, {28800, -3.}}
	model	linear function

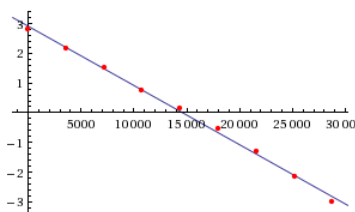
Least-squares best fit:

$$2.91089 - 0.000199444x$$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R <sup>2</sup>	adjusted R <sup>2</sup>
-11.1649	-10.5732	0.997477	0.997116

Plot of the least-squares fit:







$$df' = \sqrt{\left(\frac{\partial f'}{\partial s} ds\right)^2 + \left(\frac{\partial f'}{\partial s'} ds'\right)^2} \Rightarrow \Delta f' = \sqrt{\left(\frac{\partial f'}{\partial s} \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial f'}{\partial s'} \Delta s'\right)^2}$$

$$\Delta f' = \sqrt{\frac{(s' \cdot (s - s') - (s' \cdot s) \cdot 1)}{(s - s')^2} \cdot \Delta s + \frac{(s \cdot (s - s') - (s' \cdot s) \cdot (-1))}{(s - s')^2} \cdot \Delta s'}$$

$$\Delta f' = \sqrt{\left(\frac{(30,2 \cdot (-15 - 30,2) - (30,20 \cdot (-15) \cdot 1))}{(-15 - 30,2)^2} \cdot 0,15\right)^2 + \left(\frac{(-15 \cdot (-15 - 30,2) - (30,2 \cdot (-15)) \cdot (-1))}{(-15 - 30,2)^2} \cdot 0,15\right)^2}$$

$$\Delta f' = \sqrt{0,00937590072467502249 + 0,0002728938918934726} = 0,0982\dots$$

Indicamos el error con una única cifra significativa y llegamos a  
 $f' = 10,0 \pm 0,1$  cm



### Madrid 2014

**1.** Respuesta c) 80. Se pide distancia recorrida desde  $t=0$ , y es un movimiento donde la ecuación  $s(t)$  es una parábola, MRUA por enunciado, avanza y retrocede, donde la ecuación de velocidad es  $v=20-10t$ , y se detiene a los 2 s, instante en el que su posición es  $s(t=2\text{ s})=80+20\cdot 2-5\cdot 2^2=100\text{ m}$ , luego avanza 20 m.  $s(t=6\text{ s})=80+20\cdot 6-5\cdot 6^2=20\text{ m}$ , luego retrocede 60 m y la distancia total recorrida es  $20+60=80\text{ m}$ .

**2.** Respuesta d) 1,21. Se trata de un MRUA,  $x=x_0 + v_0t + \frac{1}{2} a t^2$

La aceleración de frenado es la asociada a la fuerza de rozamiento, cuyo valor es  $F_r=\mu N$ , siendo la normal la reacción que ejerce la mesa sobre el objeto. Como el sistema no es inercial, además de la normal asociada al peso, la fuerza normal tiene un término adicional asociado a la fuerzas inerciales, cuyo valor es  $m\cdot a_i$ , siendo  $a_i$  la aceleración del sistema no inercial.

No se indica el valor de  $g$ , pero tomamos  $9,8\text{ m/s}^2$

$$a=-F_r/m=-\mu N/m=-\mu(mg+m\cdot a_i)/m=0,13\cdot(9,8+1)\cdot 0,5/0,5=-1,404\text{ m/s}^2$$

$$\text{Sustituyendo } 2=0+2,5t+0,5(-1,404)t^2 \rightarrow 0,702t^2-2,5t+2=0$$

$$t = \frac{2,5 \pm \sqrt{(-2,5)^2 - 4 \cdot 0,702 \cdot 2}}{2 \cdot 0,702} = \frac{2,5 \pm 0,796}{1,404} = t = 1,21\text{ s}$$

Tomamos el tiempo más pequeño de los dos, ya que es el asociado a la llegada al borde. El otro tiempo estaría asociado a un supuesto retorno a la posición del borde si la mesa fuese más larga y se mantuviese la aceleración negativa, lo que no tiene sentido en este caso.

**3.** Respuesta b) 1/6. El módulo del impulso de ambos cuerpos es igual al módulo del momento lineal antes del choque, que tiene sentido opuesto.  $I=F\cdot \Delta t=\Delta p$ . Asumimos que ambos parten del reposo, por lo que  $p_1=F_1\cdot t$  y  $p_2=-F_2\cdot t$ , tomando como sentido positivo el del movimiento del cuerpo al que se aplica  $F_1$ .

En la colisión quedan pegados, por lo que  $p_1+p_2=(m_1+m_2)\cdot v$ . Como  $m_1=m_2=m$  y  $F_1/F_2=3/2$ ,  $F_2=(2/3)F_1$

$$\text{tenemos que } \left(1 - \frac{2}{3}\right) F_1 \cdot t = 2m \cdot v \rightarrow v = \frac{1}{6} \frac{F_1 t}{m}$$

**4.** Respuesta b) 1,7. Si se deja caer con la altura mínima, la altura tiene que ser tal que en el primer looping tenga suficiente velocidad para que la fuerza centrípeta asociada exclusivamente al peso sea suficiente para que realice el looping, sin que haya normal que ejerzan los carriles ni el asiento en el punto más alto.

$$F_{ci}=mv_1^2/R_1=mg \rightarrow v_1^2=gR_1$$

Igualando energías potencial en el punto inicial y potencial más cinética en el punto más alto del primer looping tenemos  $mgh=mg2R_1 + \frac{1}{2} mv_1^2 \rightarrow gh=g2R_1 + \frac{1}{2} gR_1 =gR_1(2 + \frac{1}{2}) \rightarrow h=5/2 R_1$

El segundo looping es más bajo, por lo que sí habrá fuerza normal; calculamos la velocidad mediante la conservación de la energía entre el punto inicial y el punto más alto del segundo looping:

$$mgh=mg2R_2 + \frac{1}{2} mv_2^2 \rightarrow v_2^2=2(gh-g2R_2)=2g(5/2 R_1 -2R_2)=2\cdot g\cdot(2,5\cdot 10-2\cdot 7,5)=20g$$

(lo dejamos en unidades  $mg$  como indica el enunciado; aquí se da el valor de  $g$  pero no es necesario usarlo)

En el punto más alto de este segundo looping tenemos

$$F_{c2}=mv_2^2/R_2=mg+N \rightarrow N=mv_2^2/R_2 - mg = m20g/R_2 - mg = mg(20/R_2 - 1) = mg(20/7,5 - 1) = 1,7mg$$

**5.** Respuesta b) 7. Utilizando la tercera ley de Kepler,  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$ , donde  $R_1$  sería el radio en el caso de

órbita circular y  $R_2$  sería el semieje mayor de la elipse en el caso de órbita elíptica.

De la elipse se nos da el perigeo, que es una distancia inferior al semieje mayor; es la distancia desde el foco al punto de corte más cercano de la elipse con su eje mayor. Por lo tanto sabemos que  $R_2 > R_1$  y tendremos  $T_2 > T_1$  por lo que será  $T_2 = 8T_1$ . Sustituyendo

$$R_2^3 = \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot R_1^3 = 64 R_1^3 \Rightarrow R_2 = \sqrt[3]{64} R_1 = 4 R_1$$

$R_1$  coincide con el perigeo de la órbita elíptica, y  $R_2$  es el semieje mayor. El valor total del eje mayor sería  $2R_2=8R_1$ , y la distancia desde el foco al apogeo será  $7R_1$ .

**6.** Respuesta c) 8534. La energía potencial que hay que aportar para subir el objeto e 1000 toneladas es  $E=mg_0h=1000\cdot 10^3\cdot 9,81\cdot 400=3,924\cdot 10^9\text{ J}$  (asumimos que en 400 m el valor de  $g$  se mantiene en  $g_0$ , no varía significativamente, y hemos tomando como referencia 0 en el suelo, por lo que es el valor de incremento de energía, la aportada)

La energía mecánica que tiene un satélite en órbita circular tiene la siguiente expresión, a la que se puede

$$\text{llegar igualando fuerza centrípeta y gravitatoria: } E_m = \frac{-1}{2} G \frac{Mm}{R_{\text{órbita}}}$$

No se nos da el valor de  $G$  ni  $M$ , pero podemos expresarlo en función de  $g_0$  y  $R_T$  que sí son datos



$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow GM = g_0 R_T^2$$

Si calculamos la energía de satelización, que es la diferencia de energía mecánica entre la órbita y el suelo (y en el suelo ignoramos el hecho de la rotación de que la Tierra sobre su eje aporta energía cinética y solamente consideramos energía potencial) tenemos

$$\Delta E_m = \frac{-1}{2} G \frac{Mm}{R_{\text{órbita}}} - \left(-G \frac{Mm}{R_T}\right) = GMm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_{\text{órbita}}}\right) = g_0 R_T^2 m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_{\text{órbita}}}\right)$$

$$\frac{-1}{2R_{\text{órbita}}} = \frac{\Delta E_m}{g_0 R_T^2 m} - \frac{1}{R_T} = \frac{3,924 \cdot 10^9}{9,81 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2 100} - \frac{1}{2 \cdot 6400 \cdot 10^3} = -5,86 \cdot 10^{-8}$$

$$R_{\text{órbita}} = \frac{1}{2 \cdot 5,86 \cdot 10^{-8}} \approx 8,53 \cdot 10^6 \text{ m}$$

7. Respuesta c) 1392. La energía mecánica que tiene un satélite en órbita circular tiene la siguiente

expresión, a la que se puede llegar igualando fuerza centrípeta y gravitatoria:  $E_m = \frac{-1}{2} G \frac{Mm}{R_{\text{órbita}}}$

No se nos da el valor de G ni M, pero podemos expresarlo en función de  $g_0$  y  $R_T$  que sí son datos

$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow GM = g_0 R_T^2$$

Si calculamos la energía de cambio de órbita, es la diferencia de energía mecánica entre la órbita superior y la inferior, y tenemos (llamamos  $R_{\text{órbita}}$  al radio de la órbita inicial, que es la suma de radio terrestre y la altura sobre superficie indicada en enunciado), y que altura doble no implica radio de órbita doble

$$\Delta E_m = \frac{-1}{2} G \frac{Mm}{R_{\text{órbita superior}}} - \left(\frac{-1}{2} G \frac{Mm}{R_{\text{órbita}}}\right) = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{R_{\text{órbita}}} - \frac{1}{R_{\text{órbita}}+h}\right) = \frac{g_0 R_T^2 m}{2} \left(\frac{1}{R_{\text{órbita}}} - \frac{1}{R_{\text{órbita}}+h}\right)$$

$$\Delta E_m = \frac{9,81 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2 300}{2} \left(\frac{1}{6400 \cdot 10^3 + 10000 \cdot 10^3} - \frac{1}{6400 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10000 \cdot 10^3}\right) \approx 1,392 \cdot 10^9 \text{ J}$$

8. Respuesta a) 1000. Se indica energía inicial y que se desprecia el rozamiento, por lo que se está dando la energía total del oscilador que se mantiene constante. La energía mecánica total es igual a la energía

potencial máxima, por lo que  $E_{m\text{máx}} = \frac{1}{2} K A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_{m\text{máx}}}{K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{2,0 \cdot 10^4}} = 0,05 \text{ m}$

La máxima fuerza recuperadora está asociada a la elongación máxima, y usando ley de Hooke

$$|F_{\text{máx}}| = K A = 2,0 \cdot 10^4 \cdot 0,05 = 1000 \text{ N}$$

9. Respuesta b) 6. Para el mismo punto del espacio tenemos  $\Delta \phi = \omega \Delta t \Rightarrow \omega = \frac{3\pi/5}{0,3} = 2\pi \text{ rad/s}$

Para el mismo instante de tiempo tenemos  $\Delta \phi = k \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{3\pi/5}{k}$

Utilizamos la relación  $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$ , sustituyendo  $\Delta x = \frac{3\pi/5}{2\pi/20} = 6 \text{ m}$

10. Respuesta c) -7. Para que tres cargas estén en equilibrio, la única opción es que estén en una línea recta, la carga central tenga un signo y las otras dos signos opuestos y del mismo valor y estén a la misma distancia. La carga central atrae a las otras dos cargas, pero al mismo tiempo esas dos cargas se repelen entre sí, por lo que se puede alcanzar el equilibrio. Como se indica que la carga menor de las tres es +1 C, esa es la carga central, y las otras dos cargas tienen que tener un valor negativo (pero mayor en valor absoluto para que tenga sentido la afirmación del enunciado de que la carga "menor" sea de +1 C. Según este criterio quedarían dos opciones: -7 C y -8 C. En el primer caso cada una de las otras dos cargas serían de -4 C, y en el segundo caso cada una de las otras dos cargas sería de -4,5 C; en ningún momento el enunciado indica que las cargas puntuales no pueden tener carga no entera expresada en Culombios, pero como no hay otro criterio para elegir, asumiendo eso la respuesta correcta sería la c) -7 C.

Podemos realizar la comprobación y comprobar que están en equilibrio si ambas cargas están equidistantes de la carga central, sea cual sea esa distancia. Las fuerzas que actuarían sobre cada una de las cargas de -4 C en los extremos y que tendrían sentidos opuestos serían:

La fuerza atractiva ejercida por la carga central sería  $K \frac{-4 \cdot 1}{d_1^2}$



La fuerza repulsiva ejercida por la carga en el otro extremo sería  $K \frac{(-4) \cdot (-4)}{(d_1 + d_2)^2}$

Sumando ambas e igualando a cero:

$$-K \left( \frac{-4}{d_1^2} + \frac{16}{(d_1 + d_2)^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{2}{d_1} = \frac{4}{d_1 + d_2} \Rightarrow d_1 = d_2$$

**11.** Respuesta b) 9,6 .Carga total asumimos que es positiva, y sean las esferas conductoras o aislantes, en equilibrio la carga de cada una se distribuye de manera uniforme en su superficie. Al conectar las esferas con un conductor de capacidad despreciable, éste no retiene carga, y la se distribuye carga entre ambas, y en el nuevo equilibrio ambas se encuentran al mismo potencial.

*Al ser una cuestión lo planteamos de manera sencilla, no consideramos en absoluto la dimensión del conductor respecto al tamaño de las esferas, realmente habría repulsión la distribución de cargas no sería uniforme.*

Utilizando la expresión de la capacidad de una esfera cargada  $C=4\pi\epsilon_0 R$ , y  $C=Q/V$ , planteamos

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Planteamos un sistema de ecuaciones sabiendo que la carga total es 20 nC

$$\frac{Q_1}{0,10} = \frac{Q_2}{0,15} \Rightarrow Q_2 = 1,5 Q_1$$

$$Q_1 + Q_2 = 20 \cdot 10^{-9} \Rightarrow 2,5 Q_1 = 20 \cdot 10^{-9} \Rightarrow Q_1 = 8 \cdot 10^{-9} \text{ C y } Q_2 = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Una vez que las esferas tengan cada una esa carga, se repelerán entre ellas, produciendo tensión en el cable. Para calcular la tensión asumimos modelo puntual: asumimos toda la carga de cada esfera situada en su centro, por lo que la distancia total entre esferas será  $0,10+0,05+0,15=0,3$  m

Utilizando la ley de Coulomb  $F = K \frac{Q_1 Q_2}{R^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-9} \cdot 1,2 \cdot 10^{-8}}{0,3^2} = 9,6 \cdot 10^{-6} \text{ N}$

**12.** Respuesta d) 4,8. La velocidad del electrón es la asociada a la diferencia de potencial con la que ha sido acelerado, inicialmente desde el reposo:

$$E_c = |q|V = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|q|V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 20 \cdot 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 8,386 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Como el campo magnético no es perpendicular a la velocidad, la trayectoria será helicoidal: para el radio de curvatura utilizamos solamente la componente perpendicular a la velocidad, que es  $0,1 \cdot \sin(75^\circ)$

Igualando fuerza magnética y centrípeta

$$m \frac{v^2}{R} = |q|vB \sin(\theta) \Rightarrow R = \frac{m v}{|q|B \sin(\theta)} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,386 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1 \cdot \sin(75)} = 0,0049 \text{ m}$$

Según esto elegiríamos la opción d, que es 4,8 mm, pero puestos a validar a nivel de física de 2º de Bachillerato, la velocidad es próxima a la de la luz en el vacío, es relativista, ya que

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{8,39 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 0,28 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,28^2}} = 1,042$$

La resistencia del electrón a ser acelerado a altas velocidades es mayor, lo que se puede interpretar cualitativamente como que su masa inercial es mayor “masa relativista”, y alcanzaría una velocidad algo menor, ya que en ese cálculo de velocidad de ha asumido m constante y con el valor de reposo.

Por lo tanto



$$E_c = |q|V = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$\frac{|q|V}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{|q|V}{m_0 c^2} + 1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \left( \frac{1}{\frac{|q|V}{m_0 c^2} + 1} \right)^2 - 1 = \frac{-v^2}{c^2}$$

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{|q|V}{m_0 c^2} + 1} \right)^2} = 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 20 \cdot 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} + 1} \right)^2} = 8,15 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

(Validación lógica del resultado: ligeramente menor, aumenta inercia y no se acelera tanto)

Con ese nuevo valor tenemos

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{8,15 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 0,27 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,27^2}} = 1,039$$

$$m \frac{v^2}{R} = |q|vB \sin(\theta) \Rightarrow R = \frac{\gamma m_0 v}{|q|B \sin(\theta)} = \frac{1,039 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,15 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1 \cdot \sin(75)} = 0,050 \text{ m}$$

El radio sería ligeramente mayor ya que tiene más inercia, pero no nos hace cambiar de opción de respuesta.

**13.** Respuesta d) 0,85. El flujo es  $\Phi = B \cdot S = B \cdot \pi \cdot R^2$

El radio inicialmente son 0,2 m, y aumenta 0,005 m/s, luego  $R = 0,2 + 0,005 \cdot t$

Sustituyendo  $\Phi = B \cdot S = B \cdot \pi \cdot (0,2 + 0,005 \cdot t)^2 = B \cdot \pi \cdot (0,005^2 t^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,005 t + 0,2^2)$

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = -B \cdot \pi \cdot (2 \cdot 0,005^2 t + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,005)$$

La fuerza electromotriz es

$$\varepsilon(t=5 \text{ s}) = 0,12 \cdot \pi \cdot (2 \cdot 0,005^2 \cdot 5 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,005) = 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

**14.** Respuesta a)  $4^\circ,8$ . Tratamos el prisma como dos refracciones. En la salida del prisma el rayo incidirá con

el ángulo límite, que será  $\theta_{\text{límite}} = \arcsen\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41,8^\circ$

Por geometría, si forma ese ángulo con la normal a la cara de salida, y el prisma tiene  $45^\circ$ , en el triángulo formado por vértice+punto salida+punto entrada podemos plantear, teniendo en cuenta que los ángulos se miden desde la normal,  $45 + (90 - 41,8) + x = 180 \rightarrow x = 86,8^\circ$ . El ángulo con la normal en el interior del prisma, que será el ángulo refractado, será  $90 - 86,8 = 3,2^\circ$

Utilizando la ley de Snell, el ángulo incidente será  $1 \cdot \sin(i) = 1,5 \cdot \sin(3,2^\circ) \rightarrow i = \arcsen(1,5 \cdot \sin(3,2^\circ)) = 4,8^\circ$

**15.** Respuesta c) 25. Se utiliza el término “derecha” para indicar “no invertida”. Para que la imagen sea no invertida y genere una imagen menor (el aumento  $+2/3$  es menor que la unidad), se trata de una lente divergente. Usamos la ecuación de la lente delgada podemos plantear

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = \frac{2}{3} s$$

Como la posición del objeto es  $s = -5 \text{ cm}$ , tenemos

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot (-5)} - \frac{1}{-5} = \frac{-3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{-1}{10}$$

Si cambiamos el tipo de lente (utilizamos un subíndice para diferenciar) pero con la mismo valor absoluto de potencia, tenemos que  $1/f' = -1/f_2'$ . Si ahora tenemos que el aumento es  $-2/3$ , planteamos para calcular la posición del objeto:

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{\frac{-2}{3}s} - \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{-3-2}{2s} \Rightarrow s = \frac{-50}{2} = -25 \text{ cm}$$

En las opciones de la cuestión no aparece el signo menos, se indica “distancia objeto” y asumimos que hace referencia al módulo.

**Problema 1.** Si la piedrecita (que asumimos puntual) es lanzada con velocidad inicial horizontal, describirá una trayectoria parabólica. Para que no caiga en la bola de piedra, se trata de que la trayectoria de esa parábola no pase por la bola de piedra, siendo el único punto en común el punto de salida.



Planteamos ecuaciones, tomando como origen de coordenadas el centro de la esfera, eje x horizontal y eje y vertical (el punto de salida será  $x=0, y=0,15$  m)

Ecuación trayectoria de la piedrecita:

Eje x:  $x=vt$

Eje y:  $y=0,15 + \frac{1}{2}(-9,81)t^2$

Trayectoria:  $y=0,15 + \frac{1}{2}(-9,81) \frac{x^2}{v^2}$

Ecuación contorno de la esfera:  $x^2+y^2=0,15^2$

Igualando ambas, y expresando el resultado final con 3 cifras significativas (las que tienen los datos 30,0 y 9,81)

$$x^2 + \left(0,15 - 4,905 \frac{x^2}{v^2}\right)^2 = 0,0225$$

$$x^2 + 0,0225 - 1,4715 \frac{x^2}{v^2} + 24,059025 \frac{x^4}{v^4} = 0,0225$$

$$x^2 \left(1 - \frac{1,4715}{v^2} + 24,059025 \frac{x^2}{v^4}\right) = 0$$

Además de la solución  $x=0$  ya conocida, puede haber una solución para el segundo término en función del valor de  $v$

$$x^2 = v^4 \cdot \frac{\left(\frac{1,4715}{v^2} - 1\right)}{24,059025} \quad \text{Para que no tenga solución} \quad \frac{1,4715}{v^2} - 1 < 0 \Rightarrow v^2 > 1,4715 \Rightarrow v > 1,21 \text{ m/s}$$

### Problema 2.

Realizamos los cálculos teniendo en cuenta las cifras significativas de los datos del enunciado.

Como al comenzar a oscilar la elongación es máxima, podríamos plantear como ecuación del movimiento armónico simple  $x(t') = A \cos(\omega t')$ , de modo que para  $t'=0$ , fuese  $x=A$ . Sin embargo se nos indica que para  $t=0$ ,  $x=2,0 \cdot 10^{-2}$  m, luego podemos plantear  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$  con  $t=t'+t_0$  de modo que cuando  $t=0$  se tiene  $t'=-t_0$ , siendo  $t_0$  el tiempo que ha tardado en avanzar desde  $x=10,0$  cm hasta  $x=2,0$  cm. La cantidad  $-\omega t_0$  la podemos ver también como el desfase inicial,  $\phi_0$  en la expresión  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$

$$x(t' = -t_0) = 2,0 \cdot 10^{-2} = 1,00 \cdot 10^{-1} \cos\left(\frac{2\pi}{1,50 \cdot 10^1}(-t_0)\right) \Rightarrow t_0 \approx -3,27 \text{ s}, \phi_0 \approx -1,37 \text{ rad}$$

En todo momento podemos plantear usando la ley de Hooke y la segunda ley de Newton que  $ma = -Kx$ , luego siendo  $t=2,0$  s. (Planteamos directamente  $a = -\omega^2 x$ , sin necesidad de calcular antes  $K$ ; realmente el dato de la masa del enunciado no lo utilizamos)

$$a(t) = \frac{-K}{m} A \cdot \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$a(t=2,0 \text{ s}) = -\left(\frac{2\pi}{1,50 \cdot 10^1}\right)^2 \cdot 1,00 \cdot 10^{-1} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{1,50 \cdot 10^1} 2 - 1,37\right) = -0,0151 \text{ m/s}^2 = -1,51 \text{ cm/s}^2$$

La aceleración es negativa, tiene el mismo sentido que la fuerza, la elongación es positiva y la fuerza recuperadora intenta llevar a la partícula al equilibrio, y está dirigida hacia  $x$  negativas.

**Problema 3.** Se podría pensar que dado que en equilibrio en la carga de cada una se distribuye de manera uniforme en su superficie, al conectar las esferas con un conductor de capacidad despreciable, éste no retiene carga, y la carga se distribuye entre ambas, y en el nuevo equilibrio ambas se encuentran al mismo potencial, planteando capacidades y el problema parece similar a la cuestión 11, pero hay una diferencia fundamental: ahora las esferas son concéntricas.

Aplicando Gauss con una superficie gaussiana esférica interior a la esfera exterior podemos razonar que la carga interna es nula, al igual que si fuera un conductor macizo, el conductor que une ambas esferas conductoras permite movilidad de carga: si la carga interna no fuese nula, habría campo y por lo tanto desplazamiento de cargas a través del conductor que una la esfera interior y exterior, por lo que no sería una situación estática

Al ser problema aquí sí hubiera tiempo sí habría que deducir la expresión de la capacidad de una esfera, pero la aplicamos directamente  $C=4\pi\epsilon_0 R$ , y  $C=Q/V$ , planteamos asumiendo carga positiva total 6 nC

Aunque no es dato del enunciado usamos la constante de Coulomb  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$



$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = K \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-9}}{0,04} = \frac{36}{0,04} = 900 \text{ V}$$

El enunciado pide el potencial en la superficie de menor radio, y el potencial es el mismo en todo el “interior” de la esfera mayor, por lo que es de 900 V

### Problema experimental 1.

Aunque se habla de difracción/interferencia, se dan las expresiones e incertidumbres y se trata de un problema de cálculo de propagación de error.

$$\theta = 21^\circ 6' = 21,1^\circ; \quad \Delta\theta = 2' = 0,03^\circ$$

$$N = 600 \text{ mm}^{-1} = 6,00 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1} \quad \Delta N = 1 \text{ mm}^{-1} = 1000 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = d \operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{N} = \frac{\operatorname{sen}(21,1)}{6 \cdot 10^5} \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 6000 \text{ \AA}$$

$$d\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} d\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial N} dN\right)^2} \Rightarrow \Delta \lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \Delta \theta\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial N} \Delta N\right)^2}$$

$$\Delta \lambda = \sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{N} \Delta \theta\right)^2 + \left(\frac{-\operatorname{sen} \theta}{N^2} \Delta N\right)^2} \Rightarrow \Delta \lambda = \sqrt{\left(\frac{\cos(21,1)}{6,00 \cdot 10^5} 3 \cdot 10^{-2}\right)^2 + \left(\frac{-\operatorname{sen}(21,1)}{(6,00 \cdot 10^5)^2} 1 \cdot 10^{-3}\right)^2}$$

$$\Delta \lambda = 4,9976 \dots \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Utilizando una única cifra significativa para el error  $\Delta \lambda = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 500 \text{ \AA}$

El valor será  $\lambda = 6000 \pm 500 \text{ \AA}$

### Problema experimental 2.

a) Se nos pide una regresión lineal de la ecuación con la que obtener  $g = T = 2\pi \left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}$

Se nos dan medidas de L y T, hay que hacer algún tipo de “manipulación” matemática para llegar a la ecuación de una recta, que tiene el aspecto  $y=ax+b$ . No hay una regla fija para hacerlo, se trata de ver cada caso, y en este caso en concreto, si expresamos L en función de T, tenemos

$$L = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

Se ve que es la ecuación de una recta  $y=ax+b$  donde  $y=L$ ,  $x=T^2$ ,  $a=g/4\pi^2$  (es la pendiente de la recta) y  $b=0$  (ordenada en el origen). Calculando la pendiente mediante regresión lineal podremos obtener el valor de g.

b) Calculamos los valores de  $T^2$  a partir de los datos dados.

Enunciado indica que se mide el tiempo para 40 oscilaciones, pero también se indica “una vez calculados los valores medios del periodo para cada longitud”, por lo que puede surgir la duda de si el valor de T proporcionado requiere o no dividir por 40. Podemos sustituir en la expresión el valor de  $g=9,81$  para una longitud y comprobar que no es necesario dividir por 40.

En el resultado de la operación mantenemos el mismo número de cifras significativas que el dato inicial.

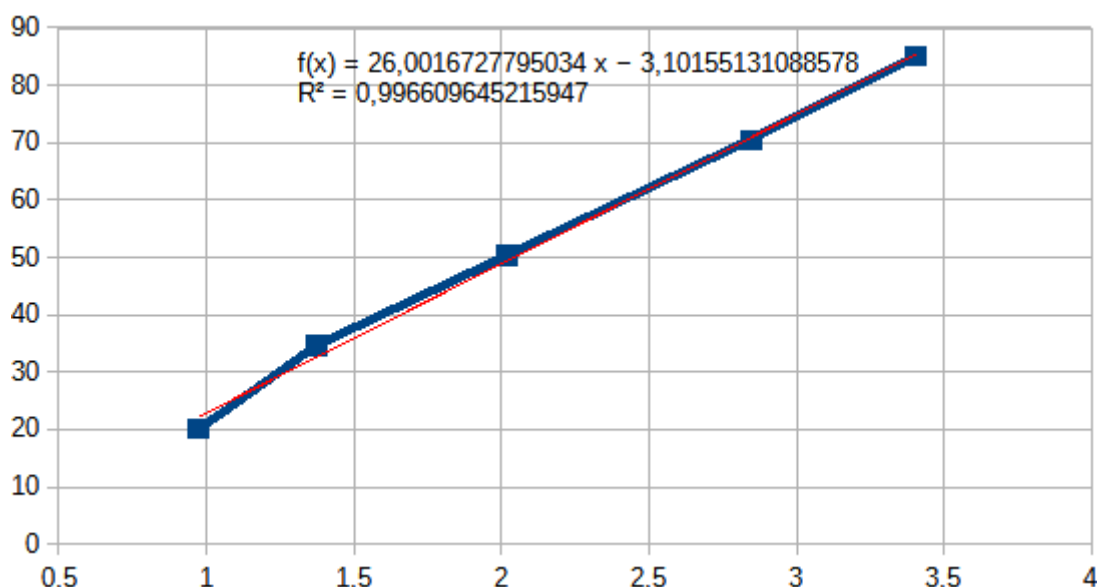
L(cm)	85,0	70,5	50,3	34,6	20,1
T(s)	1,845	1,687	1,421	1,172	0,986
$T^2(\text{s}^2)$	3,404	2,846	2,019	1,374	0,972

Representamos y vemos que es aproximadamente una recta (en el enunciado se indica “en papel milimetrado”)

c) Realizamos la regresión lineal (ver comentarios generales en resolución de problema experimental 2013)







<http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{3.404%2C85.0}}%2C{{2.846%2C70.5}}%2C{{2.019%2C50.3}}%2C{{1.374%2C34.6}}%2C{{0.972%2C20.1}}>

Vemos que es una recta que aproximadamente pasa por el origen, y cuyo valor de pendiente es  $26,0017 = g/4\pi^2$

Por lo que tenemos

$$g = 1026,5... \text{ cm/s}^2$$

(relativamente cercano al valor de que podríamos esperar de  $981 \text{ cm/s}^2$ )

Inicialmente tomamos 3 cifras significativas, que es el número menor de cifras significativas que tienen las medidas, y podríamos indicar  $1,03 \cdot 10^3 \text{ cm/s}^2$ .

Como el enunciado pide calcular  $g$  con su incertidumbre, podemos aprovechar la representación gráfica. Reutilizando la idea indicada en la solución de Aragón 2011:

*“Cuando se quiere hacer una estimación “manual” de la incertidumbre de una pendiente, normalmente se trazan las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a la serie de puntos experimentales y se obtiene la incertidumbre como*

$$\Delta p = \frac{1}{2} (p_{\text{máx}} - p_{\text{mín}}) \quad “$$

Viendo la gráfica tomamos pendiente máxima entre los dos primeros puntos, y pendiente mínima entre el segundo punto y el punto 3.

$$p_{\text{máx}} = (34,6 - 20,1) / (1,374 - 0,972) = 36 \text{ cm/s}^2$$

$$p_{\text{mín}} = (50,3 - 34,6) / (2,019 - 1,374) = 24 \text{ cm/s}^2$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} (36 - 24) = 6 \text{ cm/s}^2$$

Por lo tanto el error en  $g$  será

$$\Delta g = 6 \cdot 4 \cdot \pi^2 = 237 \text{ cm/s}^2$$

Indicamos el error con una única cifra significativa y llegamos a

$g = 1000 \pm 200 \text{ cm/s}^2$ , intervalo que incluye el valor que podríamos esperar de  $981 \text{ cm/s}^2$ .

fit	data	{{3.404, 85.}, {2.846, 70.5}, {2.019, 50.3}, {1.374, 34.6}, {0.972, 20.1}}
	model	linear function

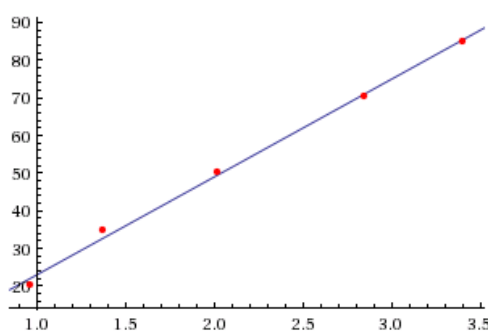
Least-squares best fit:

$$26.0017x - 3.10155$$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R <sup>2</sup>	adjusted R <sup>2</sup>
23.313	22.1413	0.99661	0.99548

Plot of the least-squares fit:





**Madrid 2013**

1. Respuesta c) 1140. Si la velocidad es constante, la fuerza neta es nula, luego la fuerza de rozamiento es igual a la fuerza que actúa. Como para fuerza constante  $W=F \cdot d=3800 \cdot 300=1,14 \cdot 10^6 \text{ J} = 1140 \text{ kJ}$

2. Respuesta d) 100 keV. Si la  $m_p=400m_e$  y  $v_p=v_e/2$ ,  $E_{cp} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} 400 m_e \left(\frac{v_e}{2}\right)^2 = 100 E_{ce}$

3. Respuesta b) m/M. No se indica si hay pérdidas, asumimos que no las hay. Por la conservación del momento  $mv=Mv'$ , luego  $v'=(m/M)v$ , luego  $E_{c'} = \frac{1}{2} M v'^2 = \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} v^2 = \frac{1}{2} m v^2 \frac{m}{M} = \frac{m}{M} E_c$

4. Respuesta d) 5/2. La velocidad mínima posible para no caerse implica que la fuerza del peso es la única centrípeta en el punto más alto,  $mg = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{g}{R}$ . No se indica si hay pérdidas, asumimos que no las hay, y aplicamos conservación de energía mecánica. Igualando energía potencial en el punto inicial y suma de potencial y cinética en lo alto del bucle  $mg h = mg 2R + \frac{1}{2} \frac{mg}{R} \Rightarrow h = 5 \frac{R}{2}$

5. Respuesta d) 4/3 ( $G\pi R\rho$ ).  $m = \rho \cdot V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$   $g = \frac{GM}{R^2} = G\rho \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{R^2} = \frac{4}{3} (G\pi R\rho)$

6. Respuesta c)  $x/\sqrt{2}$ .  $g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{g_0}{g_x} = \frac{R_x^2}{R_0^2} \Rightarrow \frac{10,0}{5,0} = \frac{x^2}{R_0^2} \Rightarrow x = \sqrt{2} R_0 \Rightarrow R_0 = \frac{x}{\sqrt{2}}$

Ojo: enunciado indica "se encuentra a una distancia x de su centro", luego es distancia total, no confundir con la altura respecto al radio en superficie  $R_0$ .

7. Respuesta d)  $2\sqrt{2} v_e$ .  $v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}} = \sqrt{2 G \rho (4/3) \pi \frac{R^3}{R}} = \sqrt{\frac{8}{3} G \rho \pi R^2} = K' R \sqrt{\rho}$   
 $v_e \cdot \rho = K' 2 R \sqrt{2 \rho} = 2 \sqrt{2} v_e$

8. Respuesta e) 10. Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita tenemos que

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R} \quad \frac{v_{Gan\u00edmedes}}{v_{Luna}} = \sqrt{\frac{M_{J\u00fapiter}}{M_{Tierra}} \cdot \frac{R_{\text{orbital Luna}}}{R_{\text{orbital Gan\u00edmedes}}}} = \sqrt{\frac{300}{2,8}} \approx 10$$

9. Respuesta d) 3,0. La velocidad m\u00e1xima es  $A\omega=0,12 \cdot 2,5=0,30 \text{ m/s}$

10. Respuesta a)  $\frac{1}{2}(\lambda a^2)$ . Se trata de un movimiento arm\u00f3nico simple, y la energ\u00eda total es igual a la energ\u00eda potencial m\u00e1xima,  $\frac{1}{2}Kx^2$ , y en este caso la constante recuperadora es  $\lambda$ , y para  $x=a$  que es la elongaci\u00f3n m\u00e1xima se tiene  $E_{\text{m\u00e1x}}=E_{\text{total}} = \frac{1}{2} \lambda a^2$

11. Respuesta c) 150.  $\Delta \phi = k \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0,050 \Rightarrow \lambda = 0,3 \text{ m}$

$$v = \lambda f = 0,3 \cdot 500 = 150 \text{ m/s}$$

12. Respuesta B. Al estar situada la imagen a una distancia inferior al foco, la imagen es virtual, y la l\u00ednea B

de datos es la \u00fanica que cumple  $A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow 4 = \frac{24}{6} = \frac{20}{5}$

13. Respuesta c) 500 W. Corriente del generador  $P=VI \rightarrow 100 \cdot 10^3=10 \cdot 10^3 \cdot I \rightarrow I=10 \text{ A}$ .  $P=R \cdot I^2=5 \cdot 10^2=500 \text{ W}$

14. Respuesta d) 100. El trabajo realizado en un campo conservativo depende solamente de la diferencia de potencial, no del camino, por lo que no afecta el \u00e1ngulo.  $W=qV=10^{-6} \cdot 100=10^{-4} \text{ J} = 100 \mu\text{J}$

15. Respuesta d)  $9,0 \cdot 10^{-7}$ . Para la fuerza ejercida entre dos conductores rectil\u00edneos separados una distancia d

se llega a la expresi\u00f3n  $F_{12} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d}$ . Con nuevos datos  $F_{12}' = \mu_0 \frac{I_1' I_2'}{2\pi d'} = F_{12} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 F_{12}$

16. Respuesta b)  $2V/q/d$ . Si las placas est\u00e1n a potenciales -V y +V, la diferencia de potencial entre ellas es 2V, y  $E=2V/d$ . La fuerza el\u00e9ctrica ser\u00e1  $F=qE=q2V/d$ , que ser\u00e1 la que debe compensar el peso.

17. Respuesta a) 4. El campo creado por el hilo a una distancia de 40 cm ser\u00e1

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 2}{2\pi 0,4} = 10^{-6} \text{ T} \quad \text{. Como la espira es peque\u00f1a, asumimos el campo uniforme en toda ella.}$$

Comentario: espira coplanaria hace referencia a que no es un solenoide en el que hay que considerar su longitud, todas las espiras est\u00e1n muy juntas, y la superficie a considerar es  $S=N \cdot s$ .



El flujo será  $\Phi = B \cdot S = B \cdot N \cdot s = B \cdot 100 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0,05}{2}\right)^2$ , y la fuerza electromotriz

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = -S \frac{dB}{dt} = -S \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -100 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0,05}{2}\right)^2 \frac{(0 - 10^{-6})}{0,050} = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ V} \approx 4 \mu\text{V}$$

Comentario: el flujo en el resto de la espira es menor, hemos tomado el valor máximo de campo en la espira.

18. Respuesta a) 0. El campo magnético creado por cada bobina en su centro es  $B = \frac{\mu N I}{2d}$ . Como ambas bobinas son coplanarias, con mismo número de espiras, y tienen sentidos opuestos, el campo total en el centro utilizando el principio de superposición será  $B = \frac{\mu}{2} \left(\frac{3}{0,05} - \frac{6}{0,1}\right) = 0$

### PROBLEMA 1.

a)  $\rho = \frac{m}{V}$

Pasamos a unidades del Sistema internacional tal y como se pide:

Masa: 4 cifras significativas, se indica balanza electrónica, la precisión es de centésimas de gramo, así que podríamos indicar que es  $36,23 \pm 0,01$  g. En unidades SI  $m = 3,623 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-5}$  kg

Diámetro: 2 cifras significativas, se indica regla graduada en milímetros, la precisión la tomamos como de 1 milímetro (se podría plantear tomar medio milímetro),  $2,1 \pm 0,1$  cm =  $0,021 \pm 0,001$  m.

En ambos casos la incertidumbre se plantea con una única cifra significativa.

Volumen  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Operamos expresando en notación científica (no imprescindible), y el resultado no puede tener más cifras significativas que los datos de partida, por lo que nos quedamos con dos.

Densidad  $\rho = \frac{3,623 \cdot 10^{-2}}{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{0,021}{2}\right)^3} = 7471,56927530854294124608 \Rightarrow \rho = 7,5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

b) Si utilizamos la expresión final de la densidad  $\rho = \frac{3}{4} \frac{2^3}{\pi} \frac{m}{D^3} = \frac{6}{\pi} \frac{m}{D^3}$

Utilizamos el error absoluto máximo, considerando medidas independientes

$$d\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} dm\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial D} dD\right)^2} \Rightarrow \Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial D} \Delta D\right)^2}$$

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{6}{\pi} \frac{\Delta m}{D^3}\right)^2 + \left(\frac{6}{\pi} m \frac{(-3)}{D^4} \Delta D\right)^2} \Rightarrow \Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{6}{\pi} \frac{10^{-5}}{0,021^3}\right)^2 + \left(\frac{6}{\pi} 3,621 \cdot 10^{-2} \frac{(-3)}{0,021^4} 0,001\right)^2}$$

$$\Delta \rho = 1066,78 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Utilizando una única cifra significativa para el error  $\Delta \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \Rightarrow \rho = 7 \cdot 10^3 \pm 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Si hubiéramos aproximado la expresión, el resultado es muy similar

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial m} dm + \frac{\partial \rho}{\partial D} dD \Rightarrow \Delta \rho = \left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial \rho}{\partial D} \right| \Delta D$$

$$\Delta \rho = \frac{6}{\pi} \frac{\Delta m}{D^3} + \frac{6}{\pi} m \frac{3}{D^4} \Delta D \Rightarrow \Delta \rho = \frac{6}{\pi} \frac{10^{-5}}{0,021^3} + \frac{6}{\pi} 3,621 \cdot 10^{-2} \frac{3}{0,021^4} 0,001$$

$$\Delta \rho = 1068,84 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

### PROBLEMA 2.

a) Las medidas de tiempo tienen 2 cifras significativas, la precisión es de décimas de segundo, así que podríamos indicar que son  $6,3 \pm 0,1$  s.

Las medidas de tiempo son independientes, el valor más probable es la media aritmética

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{n} = \frac{6,3 + 6,4 + 6,4 + 6,4 + 6,5 + 6,5 + 6,6 + 6,6 + 6,6 + 6,7}{10} = 6,5 \text{ s}$$

El error más probable es el error cuadrático medio



$$\Delta t = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{(6,3-6,5)^2 + (6,4-6,5)^2 + (6,4-6,5)^2 + (6,4-6,5)^2 + (6,5-6,5)^2 + (6,5-6,5)^2 + (6,6-6,5)^2 + (6,6-6,5)^2 + (6,6-6,5)^2 + (6,7-6,5)^2}{10 \cdot 9}}$$

$$\Delta t = 0,03944053188733077362 \Rightarrow \Delta t = 0,04 \text{ s}$$

Como el error cuadrático medio es menor que el error instrumental asociado a la precisión de las medidas, de modo que tomamos como resultado  $t = 6,5 \pm 0,1 \text{ s}$

b) Realizamos los cálculos de propagación de error. Se trata de un MRUA, y necesitamos una expresión que realacione aceleración, distancia recorrida (asumimos velocidad inicial nula) y tiempo.

$$L = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow a = 2L/t^2 = 2 \cdot 1,18/6,5^2 = 0,055857988 \dots \text{ m/s}^2$$

Utilizamos el error absoluto máximo, considerando medidas independientes

$$da = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial L} dL\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t} dt\right)^2} \Rightarrow \Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t\right)^2}$$

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \Delta L\right)^2 + \left(2L \frac{(-2)}{t^3} \Delta t\right)^2} \Rightarrow \Delta a = \sqrt{\left(\frac{2}{6,5^2} 0,02\right)^2 + \left(2 \cdot 1,18 \cdot \frac{2}{6,5^3} 0,1\right)^2}$$

$$\Delta a = 0,00196221 \Rightarrow \Delta a = 0,002 \text{ m/s}^2$$

Utilizando una única cifra significativa para el error  $a = 0,056 \pm 0,002 \text{ m/s}^2$

### PROBLEMA 3.

a) Se nos pide una representación lineal de la ecuación  $m = \frac{kbP}{1+bP}$

Hay que hacer algún tipo de “manipulación” matemática para llegar a la ecuación de una recta, que tiene el aspecto  $y = ax + b$ . No hay una regla fija para hacerlo, se trata de ver cada caso, y en este caso en concreto, si

invertimos ambos lados de la igualdad llegamos a  $\frac{1}{m} = \frac{1+bP}{kbP} = \frac{1}{kb} \frac{1}{P} + \frac{1}{k}$  que es la ecuación de una recta

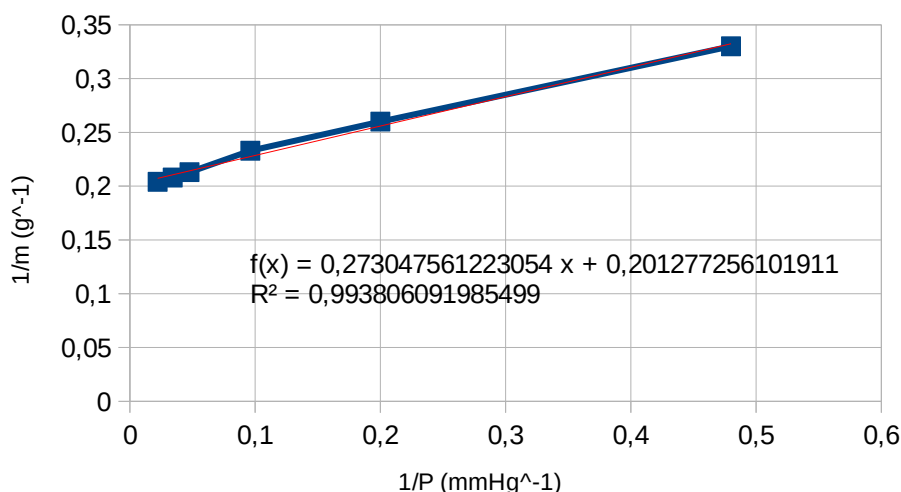
$y = ax + b$  donde  $y = 1/m$ ,  $x = 1/P$ ,  $a = 1/kb$  (es la pendiente de la recta) y  $b = 1/k$  (ordenada en el origen)

Calculamos los valores de  $1/P$  y de  $1/m$  a partir de los datos dados.

En el resultado de la operación mantenemos el mismo número de cifras significativas que el dato inicial.

P(mmHg)	2,1	4,9	10,4	21,0	29,2	45,0
m(g)	3,0	3,8	4,3	4,7	4,8	4,9
1/P (mmHg <sup>-1</sup> )	0,48	0,20	0,0962	0,0476	0,0342	0,0222
1/m (g <sup>-1</sup> )	0,33	0,26	0,233	0,213	0,208	0,204

Representamos y vemos que es aproximadamente una recta



b) Cualitativamente, dentro de cierto margen de error experimental, vemos que es una recta luego sí se cumple la ecuación de Langmuir, pero se pide demostrar mediante un análisis de regresión lineal, que supone buscar la línea recta que mejor se ajusta a los datos experimentales, con una indicación de correlación que indica en qué medida se aproximan a una recta.

La manipulación de datos se suele hacer informáticamente, y por ejemplo se incluye el resultado obtenido con wolframalpha en su versión web gratuita (resultado accesible en esta url:

<http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{0.48%2C+0.33}}%2C{{0.20%2C+0.26}}%2C{{0.0962%2C+0.233}}%2C{{0.0476%2C+0.213}}%2C{{0.0342%2C+0.208}}%2C{{0.0222%2C+0.204}}>)

Se aprecia que se tiene un valor de correlación R muy próximo a 1, luego es muy correcto asumir el ajuste a una recta.

Pero lo tenemos que hacer manualmente, tal y como se podría hacer durante la prueba

¿Cómo hacerlo? En la solución de la fase local de Aragón de 2011, se da el ajuste por realizado sin incluir los pasos detallados que se harían en el examen, ya que se dice por ejemplo “Un ajuste analítico, empleando el método de “mínimos cuadrados”, conduce a... Los puntos se ajustan muy bien a una línea recta de pendiente  $p = 1,97$  (calculada por “mínimos cuadrados”)” pero no se aportan los cálculos, en cierto modo se asume que se sabe cómo hacer.

Comento dos ideas sobre cómo estimar esa recta  $y=ax+b$  manualmente y la calidad de la estimación, que se pueden hacer en un tiempo razonable manualmente:

A. Con una calculadora convencional, que no tiene funciones asociadas a análisis de datos, se puede hacer una estimación de la pendiente cogiendo dos puntos alejados, por ejemplo el primero y el tercero (no cogemos el último ya que se aprecia que hay puntos por encima de la esa recta, y así hacemos que la recta esté “más cerca de todos los puntos”), con lo que se tendría que la pendiente es

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,33 - 0,213}{0,48 - 0,0476} \approx 0,271 \quad (\text{resultado similar al obtenido informáticamente}).$$

Para calcular el valor de b se puede usar esa pendiente y un punto alejado del origen (0,48; 0,0222)

$$y = ax + b \rightarrow 0,33 = 0,271 \cdot 0,48 + b \rightarrow b = 0,2 \quad (\text{resultado similar al obtenido informáticamente})$$

Para realizar el análisis de regresión lineal, podríamos calcular los valores de y estimados que están asociados a cada valor de x según la ecuación obtenida de esta recta, y calcular las diferencias con los valores obtenidos de y, calculando

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

B. Con una calculadora con funciones estadísticas (por ejemplo CASIO fx-82MS que es muy habitual). Se usa modo regresión (indicado con REG): [mode]

[3]

Input interpretation:

fit	data	{{0.48, 0.33}, {0.2, 0.26}, {0.0962, 0.233}, {0.0476, 0.213}, {0.0342, 0.208}, {0.0222, 0.204}}
	model	linear function

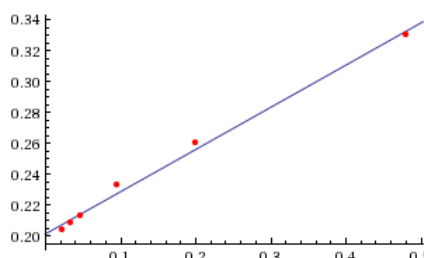
Least-squares best fit:

$$0.273048 x + 0.201277$$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R <sup>2</sup>	adjusted R <sup>2</sup>
-44.9755	-45.6002	0.993806	0.992258

Plot of the least-squares fit:





Borramos inicialmente la memoria estadística [shift][CLR][1][=]

Introducimos datos con <datos x> [ ' ] <datos y> [DT] (la tecla DT es M+ en modo REG, cada vez que introducimos datos nos indica en pantalla n, el número de parejas de datos introducidas)

Obtenemos el coeficiente de correlación R con [shift][S-VAR][>][>][3]

La recta se nombra como  $y=Bx+A$ , y se pueden obtener los valores:

Valor de pendiente B: [shift][S-VAR][>][>][2] = 0,273

Valor de ordenada en origen A: [shift][S-VAR][>][>][1] = 0,2

c) El valor máximo de la masa absorbida es k (que en la ecuación es el valor asociado a P infinita), y en la gráfica y ecuación de la recta el valor de  $1/k$  es el valor de la ordenada en el origen, que es el valor asociado a  $1/P$  igual a cero.

Como ya hemos obtenido la ecuación de la recta (por centrarse en cálculo numérico no hemos puesto unidades en las constantes, aunque las tendrían), el valor de  $1/k=0,20$  ( $g^{-1}$ ), luego el valor máximo de masa absorbida sería 5,0 g. No se pide la estimación del error, que requeriría la estimación del error en la regresión lineal, que tiene su propia expresión

Referencias: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/medidas/medidas.htm>

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/regresion/regresion.htm>



## Madrid 2012

Enunciado indica "Tómese, donde se necesite,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ "

1. Respuesta d). Tomamos referencia en el punto de partida del policía, y  $t=0$  cuando inicia el movimiento.

$$s_{\text{policía}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15^2 + 3 \cdot 15 \cdot (t - 15) \quad s_{\text{coche}} = \frac{108}{3,6} \cdot t \quad \text{En el encuentro coinciden ambos, igualando}$$

$$s_{\text{policía}} = s_{\text{coche}} \Rightarrow 337,5 + 45t - 675 = 30t \Rightarrow 15t = 337,5 \Rightarrow t = \frac{337,5}{15} = 22,5 \text{ s}$$

2. Respuesta c). Planteamos la velocidad del barco  $3,33 \text{ m/s}$  como la hipotenusa de un triángulo donde la velocidad transversal son  $1,11 \text{ m/s}$ , y el otro cateto sería la componente de velocidad en la dirección hacia el puerto, que valdrá:  $3,33 \cdot \cos(\arcsen(1,11/3,33)) = 3,1396 \text{ m/s}$ . El tiempo en recorrer los  $3000 \text{ m}$  será  $3000/3,1396 = 956 \text{ s}$

3. Respuesta a). No hay rozamiento, luego la única fuerza centrípeta que curva la trayectoria de la bola es la tensión de la cuerda, y esa tensión máxima estará asociado al radio mínimo. Igualando  $F_c = T = m \frac{v^2}{R}$

Necesitamos conocer la velocidad de la bola en esa circunferencia de radio mínimo: será la asociada a la situación inicial, ya que al no haber rozamiento se mantendrá, y será  $v = \omega R = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi \text{ m/s}$

Sustituyendo  $105 = 0,5 \cdot \frac{(2 \cdot \pi)^2}{R} \Rightarrow R = \frac{2 \cdot \pi^2}{105} \approx 0,19 \text{ m}$  El valor más cercano es  $21 \text{ cm}$ .

4. Respuesta a. Tomamos referencia con altura cero en el punto donde el motor empieza a actuar, y la altura de  $91,7 \text{ m}$  la consideramos desde ese punto, por lo que sube  $66,7 \text{ m}$  una vez que el motor deja de actuar, pero el rozamiento con el aire está actuando los  $91,7 \text{ m}$ .

Nombrando dos puntos B (punto más alto) y A (en referencia antes de que actuase el motor) se puede plantear de dos maneras equivalentes:

-Por teorema de las fuerzas vivas, el trabajo total es igual a la variación de la energía cinética

Trabajo realizado por la fuerza del motor es  $W = F \cdot \Delta x = 9 \cdot 25 = 225 \text{ J}$ .

Trabajo realizado por el peso  $W = F \cdot \Delta x \cdot \cos(180^\circ) = -0,2 \cdot 9,81 \cdot 91,7 = -179,9 \text{ J}$

Trabajo realizado por el rozamiento  $W = F \cdot \Delta x \cdot \cos(180^\circ) = -F \cdot 91,7 \text{ J}$

$$225 - 179,9 - F \cdot 91,7 = 0 \rightarrow F = 0,49 \text{ N}$$

-Por conservación de energía, la variación de energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas, que son la fuerza del motor y la del rozamiento

B:  $E_p = 179,9 \text{ J}$ , y con  $E_c = 0$

A:  $E_p = 0$  y con  $E_c = 0$

$$179,9 = 225 - F \cdot 91,7 \rightarrow F = 0,49 \text{ N}$$

5. Respuesta c. Dado que el momento angular es constante podemos plantear

$$r_a m v_a = r_p m v_p \Rightarrow \frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{7,2}{0,6} = 12$$

$$\frac{E_{ca}}{E_{cp}} = \frac{\frac{1}{2} m v_a^2}{\frac{1}{2} m v_p^2} = \left( \frac{v_a}{v_p} \right)^2 = 12^2 = 144 \quad \frac{E_{pa}}{E_{pp}} = \frac{-G \frac{Mm}{r_a}}{-G \frac{Mm}{r_p}} = \frac{r_p}{r_a} = 12 \quad \frac{E_{ca}/E_{cp}}{E_{pa}/E_{pp}} = \frac{144}{12} = 12$$

6. Respuesta b. (Ver resolución de problema 1 de olimpiada Madrid 2015)  $h = (2/3) \cdot R = 2 \cdot 15/3 = 10 \text{ m}$

7. "Respuesta d" (ver comentarios). Si utilizamos la ley de gravitación universal, recordando los valores de  $G$  y de la masa de la Tierra (que no eran datos, el único dato es  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )

$$\text{Peso} = F = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow 1 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}} = 2 \cdot 10^7 \text{ m}$$



Lo que parece inconsistente e indicaría que ninguna respuesta de las cuatro opciones es válida, pero hay que pensar que hemos usado una expresión que es válida para el exterior de la Tierra. Recordando el valor del radio de la Tierra,  $6,37 \cdot 10^6$  m, vemos que las cuatro opciones son menores. En el interior de la Tierra, asumiendo densidad uniforme y una esfera perfecta, se puede comprobar que el campo varía linealmente desde 0 en el centro hasta el valor de  $9,81$   $m/s^2$  en la superficie, por lo que dado que  $P=m \cdot g$ , vemos que para que peso y masa sean numéricamente 1, necesitamos un valor de  $g=1$   $m/s^2$ , aunque en este caso es más claro utilizar las unidades equivalentes alternativas 1 N/kg. Como la variación es lineal podemos plantear una proporción y tenemos  $6,37 \cdot 10^6/9,81=x/1 \rightarrow x = 6,5 \cdot 10^5$  m = 650 km.

**El valor no coincide con ninguno de los 4 propuestos, pero el valor más próximo es el d, que es el mayor, aunque hay una diferencia de un orden de magnitud.**

Se incluye una imagen de

[http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales\\_didacticos/campo\\_gravitatorio\\_prob/applet2.html](http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/campo_gravitatorio_prob/applet2.html) para validar que aproximadamente la solución están cercana a los 700 km.

**8.** Respuesta d. El trabajo está asociado a la diferencia de energía potencial, y como es el trabajo realizado por el ascensor el sentido es el opuesto al trabajo realizado por la fuerza de la gravedad.

$$W_{A \rightarrow B} = E_{pB} - E_{pA} = \frac{-GMm}{r_B} - \left( \frac{-GMm}{r_A} \right) = GMm \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Si la altura es R, la distancia es 2R

$$W_{A \rightarrow B(R, M)} = GMm \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = GMm \frac{(2-1)}{2R} = \frac{GMm}{2R}$$

$$W_{A \rightarrow C(3R/2, M)} = GMm \left( \frac{1}{3R/2} - \frac{1}{R_C} \right)$$

Igualando

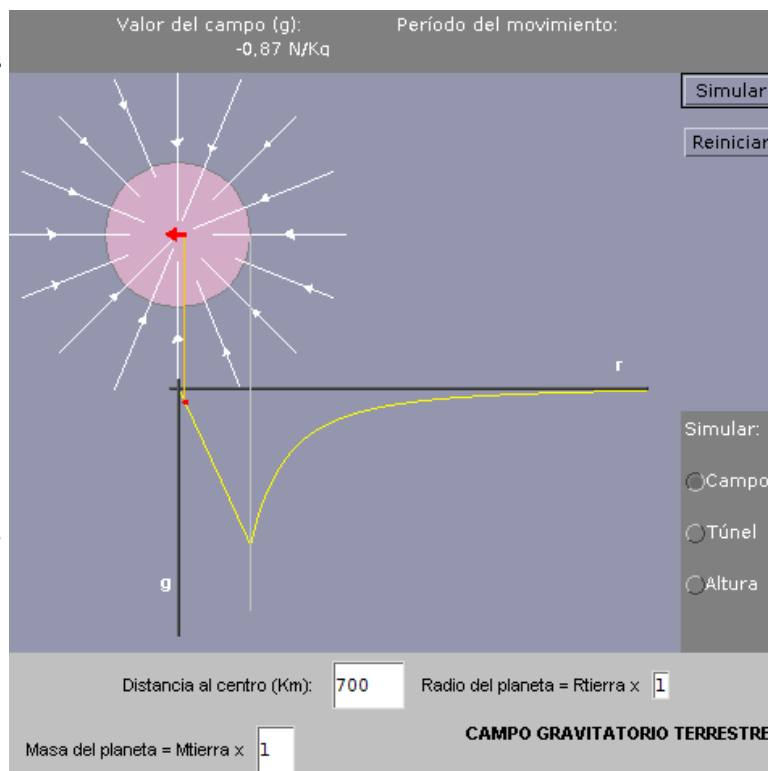
$$\frac{GMm}{2R} = GMm \left( \frac{1}{3R/2} - \frac{1}{R_C} \right) \Rightarrow \frac{1}{2R} - \frac{2}{3R} = \frac{-1}{R_C} \Rightarrow \frac{(3-4)}{6R} = \frac{-1}{R_C} \Rightarrow R_C = 6R$$

Si la distancia es 6R, la altura es  $6R - 3R/2 = (12R - 3R)/2 = 9R/2$

**9. “Respuesta d” (ver comentarios).** El paquete al caer y chocar con el naufrago+tablón queda unido formando un único sistema paquete+naufrago+tablón que se mueven juntos, por lo que el planteamiento tiene que asumir un choque perfectamente inelástico, y tenemos que considerar conservación de momento lineal, no hay conservación de energía cinética en el choque.

El paquete aportará cierta energía cinética al tablón que lo empujará hacia abajo (junto con el naufrago y el propio paquete), hasta que tras descender en el agua se detenga. La altura de caída del paquete que es lo que tenemos que averiguar está relacionada con la velocidad con la que el paquete llega al tablón y con la energía cinética que transfiere al tablón (vía conservación de momento lineal, ya que es un choque inelástico y habrá ciertas pérdidas).

Para calcular qué energía debe aportar el choque del paquete calculamos la variación de energía mecánica entre las dos posiciones del tablón. Podemos plantear que la  $E_m$  está asociada a  $E_p$ , tanto gravitatoria como  $E_p$  “de empuje”, ya que el cuerpo al sumergirlo tiene una energía asociada a su posición, y podríamos definir una  $E_p$  asociada. En cualquier caso se ve que las fuerzas gravitatoria y de empuje son conservativas; almacenan  $E_p$  llevando el sistema a una posición que “devuelven” cuando el sistema regresa a esa posición. La  $E_p$  gravitatoria aumenta al subir (almacenamos energía al subir un objeto que devuelve cuando cae), y la  $E_p$  de empuje aumenta al bajar (almacenamos energía al bajar un objeto en el fluido que devuelve cuando







sube).

Tomamos referencia de energía potencial en el punto en el que el sistema está totalmente sumergido con la superficie del tablón coincidiendo con la superficie del agua. El centro de masas (que no calculamos, de lo único que conocemos el volumen es del tablón; el náufrago y el paquete lo tendríamos que modelar puntualmente en la superficie del tablón o a una altura arbitraria) es el punto donde tomamos referencia  $E_p=0$ .

Nombramos dos situaciones:

B: En el momento en el que el tablón (unido a náufrago y paquete) se detiene con su superficie coincidiendo con la superficie del agua

$E_c=0$ ,  $E_{pg}=0$ ,  $E_{pempuje}=(\text{mismo valor que la } E_{pg} \text{ en la situación A, al no haber pérdidas})$

A: Justo tras el impacto (consideramos el paquete ya apoyado en el tablón y contribuye al peso, pero no se ha empezado a mover)

$E_c=0$ ,  $E_{pg}=M_{\text{total}} \cdot g \cdot h$ ,  $E_{pempuje}=0$

Para calcular la altura, consideramos que el centro de gravedad del sistema de masas ha bajado la misma altura que baja la cara superior del tablón. Consideramos que antes de caer el paquete el sistema está en equilibrio y el empuje es igual al peso, lo que nos permite calcular qué parte del tablón asoma desde la superficie del agua. Calculamos la masa del tablón,  $m=d \cdot V=550 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5=1650$  kg.

*(Comentario personal: la masa del tablón parece elevada, y se debe al grosor de 0,5 m, que es un "bloque de madera" más que un tablón)*

El peso total del tablón, del náufrago y del paquete es de  $(1650+80+20) \cdot 9,81=17167,5$  N.

Llamamos  $x$  a la distancia vertical del tablón, en su lado más estrecho, que está sumergida en equilibrio.

$E=V_{\text{desalojado}} \cdot d_{\text{fluido}} \cdot g \rightarrow 17167,5=(3 \cdot 2 \cdot x) \cdot 1100 \cdot 9,81 \rightarrow x=0,265$  m.

Están sumergidos 26,5 cm y sobre el agua 23,5 cm.

Así tenemos que  $E_{pg}=(1650+80+20) \cdot 9,81 \cdot 0,235=4034,36$  J

$E_m(A)-E_m(B)=4034,36$  J

Si igualamos la  $E_c$  del náufrago+tablón+paquete que debe aportar el choque del paquete, podemos calcular la velocidad del paquete **si fuera totalmente elástico (como sabemos que es inelástico tendrá que ser un valor mayor de energía del paquete, parte se pierde en calor, y un valor mayor de altura)**

$E_c=1/2 M_{\text{total}} \cdot v_{\text{total}}^2$ ;  $4034,36=0,5 \cdot (1650+80+20) \cdot v^2=875v^2$

$$v = \sqrt{\frac{4034,36}{875}} = 2,15 \text{ m/s} \quad \text{Velocidad inicial de náufrago+tablón+paquete}$$

Esa energía cinética la debe aportar el paquete, por lo que si igualamos la energía mecánica a la energía cinética del paquete (asumimos un choque totalmente inelástico)

$$4034,36=0,5 \cdot 20 \cdot v^2; \quad v = \sqrt{\frac{4034,36}{10}} = 20,09 \text{ m/s}$$

Como la caída del paquete es un MRUA con la aceleración de la gravedad y velocidad inicial nula, podemos

$$\text{plantear } v^2 - v_0^2 = 2as \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a} = \frac{20,09^2}{2 \cdot 9,81} = 20,6 \text{ m}$$

La única solución con una altura superior es la  $d$ , 23,7 m; el paquete al chocar aportará más energía pero al ser inelástico parte se disipará en calor / se empleará en deformación del paquete.

*Comentario: se resuelve por energías y no se utiliza en absoluto el dato de duración del impacto. Vemos cómo sería hacer un planteamiento dinámico usando impulso y momento lineal, pero la solución no se aproxima tanto como en el planteamiento anterior.*

*Como el tablón+náufrago inicialmente tenían velocidad cero, calculamos la variación de momento (si usamos valor de velocidad inicial de náufrago + tablón + paquete calculado antes)*

$$\Delta p = p_{\text{final}} - p_{\text{inicial}} = (1650+80+20) \cdot 2,15 - 20 \cdot v = 3762,5 - 20v$$

*Al mismo tiempo la variación de momento lineal es igual al impulso, que depende del tiempo del impacto y de la fuerza aplicada. La fuerza aplicada es la masa del paquete por su aceleración, aceleración que es constante y es la gravedad, por lo que la fuerza es el peso (aunque el paquete lleve velocidad, la fuerza sigue siendo el peso, la contribución de la velocidad se plantea al tratar el momento lineal)*

**Si el choque es perfectamente inelástico y los cuerpos quedan unidos ¿qué pretende decir el enunciado "Si el impacto dura 0,01 s"? Se puede pensar que es el tiempo que el tablón está bajando y que el paquete lo está "empujando", porque una vez que suba el paquete "ya no es impacto".**

$$\Delta p = I = F \Delta t \Rightarrow 3762,5 - 20v = 20 \cdot 9,81 \cdot 0,01 \Rightarrow v = \frac{3762,5 - 20 \cdot 9,81 \cdot 0,01}{20} = 187 \text{ m/s}$$

*Como la caída del paquete es un MRUA con la aceleración de la gravedad y velocidad inicial nula,*



$$\text{podemos plantear } v^2 - v_0^2 = 2as \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a} = \frac{187^2}{2 \cdot 9,81} = 1782 \text{ m}$$

Un valor tan alto es consistente con que una masa tan pequeña tiene que impactar con mucha velocidad para ser capaz de desplazar una masa tan grande.

Ambos resultados no coinciden ya que son planteamientos totalmente distintos, en uno no se utiliza para nada la duración del impacto y el otro se basa precisamente en él.

Viendo la masa tan grande surge pensar de dónde procede: es del tablón, y releendo los datos del enunciado en modo lógico, un tablón sería de 3 m x 2 m x 0,05 cm (un grosor de 0,5 m no sería un tablón sino un grueso bloque de madera). Si repetimos el planteamiento, la masa del tablón sería de 165 kg, peso 2600 N,  $2600 = (3 \cdot 2 \cdot x) \cdot 1100 \cdot 9,81 \rightarrow x = 0,04 \text{ m}$ , está sumergido 4 cm y sobre el agua 1 cm.

$$(165 + 80 + 20) \cdot 9,81 \cdot 0,01 = 26 \text{ J}, \quad 26 = 0,5 \cdot (165 + 80 + 20) \cdot v^2 = 132,5v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{26}{132,5}} = 0,44 \text{ m/s}$$

$$\Delta p = (165 + 80 + 20) \cdot 0,44 - 20 \cdot v = 116,6 - 20v \quad v = \frac{116,6 - 20 \cdot 9,81 \cdot 0,01}{20} = 5,7 \text{ m/s}$$

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{5,7^2}{2 \cdot 9,81} = 1,7 \text{ m}$$

No próximo a ninguna de las soluciones propuestas, e irreal para la altura de un helicóptero: a 1,7 ya puestos rescataría al náufrago.

**10.** Respuesta b. Al ser adiabático, planteamos que calor cedido por el bloque de aluminio es igual al calor absorbido por el calorímetro y el agua

$$Q_{cedido} = Q_{absorbido} \Rightarrow 300 \cdot 0,26 \cdot (100 - T) = (250 + 50) \cdot 1 \cdot (T - 12)$$

$$7800 - 78T = 300T - 3600 \Rightarrow T = \frac{7800 + 3600}{300 + 78} = 30,16 \text{ }^\circ\text{C}$$

**11. "Respuesta c" (ver comentarios).** El trabajo está asociado a la diferencia de energía potencial. Calculamos el potencial en ambos puntos, que llamamos A(4,0; 2,0) y B(0;0), utilizando el principio de superposición:

$$V(A) = V_1(A) + V_2(A) = K \frac{q_1}{r_{1A}} + K \frac{q_2}{r_{2A}} = 9 \cdot 10^9 \left( \frac{8,11 \cdot 10^{-9}}{4} + \frac{-8,11 \cdot 10^{-9}}{2} \right)$$

$$V(A) = 9 \cdot 10^9 \frac{(8,11 \cdot 10^{-9} - 2 \cdot 8,11 \cdot 10^{-9})}{4} = -18,25 \text{ V}$$

$$V(B) = V_1(B) + V_2(B) = K \frac{q_1}{r_{1B}} + K \frac{q_2}{r_{2B}} = -9 \cdot 10^9 \left( \frac{8,11 \cdot 10^{-9}}{2} + \frac{-8,11 \cdot 10^{-9}}{4} \right)$$

$$V(B) = 9 \cdot 10^9 \frac{(2 \cdot 8,11 \cdot 10^{-9} - 8,11 \cdot 10^{-9})}{4} = 18,25 \text{ V}$$

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -q \Delta V = -q(V(B) - V(A)) = -5,32 \cdot 10^{-9} \cdot (18,25 - (-18,25)) = -1,94 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Una carga positiva se mueve espontáneamente hacia potenciales menores, y el potencial en B es mayor que en A. El trabajo realizado por el campo es negativo, es en contra del campo, luego se debe realizar externamente al campo", y "el trabajo que hay que realizar externamente para trasladar la carga positiva" sería positivo, ya que lo tendríamos que aportar externamente.

**El valor no coincide con ninguno de los 4 propuestos, pero numéricamente se asemeja a las opciones a y c, y entre las 2, optamos por la c, de signo positivo. (Sería correcto si enunciado indicase 5,32 mC)**

**12.** Respuesta c. Si el campo eléctrico es uniforme, podemos plantear  $\Delta E_p = qEd$ . La pérdida de energía potencial en ese trayecto (el campo va dirigido hacia potenciales menores y la velocidad se indica dirigida en el sentido del campo, por lo que va a transformar en energía cinética) está asociada a la variación de energía potencial, por lo que planteamos (debemos conocer la carga del electrón sin ser dato)

$$\Delta E_p = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 325 \cdot 0,154 = -8 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$E_c(B) = E_c(A) + \Delta E_p = 1,6 \cdot 10^{-17} - 8 \cdot 10^{-18} = 8 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ . Si lo convertimos a eV (dividiendo por  $1,6 \cdot 10^{-19}$ ), obtenemos una energía de 50 eV.

**13.** Respuesta a. Dado que la velocidad y el campo forman  $90^\circ$ , podemos expresar el módulo de la fuerza

como  $F = qvB$ , siendo el B el asociado a un conducto recto indefinido, de módulo  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$

Igualando y sustituyendo



$$F = qv \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \Rightarrow v = \frac{F 2\pi d}{q\mu_0 I} = \frac{5,0 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,0} = 3,125 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$$

14. Respuesta c. Si la bobina gira alrededor de uno de sus ejes que es perpendicular al vector campo magnético, podemos plantear el flujo como  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}_{total} = B \cdot N \cdot S_{espira} \cdot \cos(\omega t)$

$$\omega = 50 \frac{\text{rev}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 100\pi \text{ rad/s}$$

Utilizando la ley de Faraday  $\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = \omega B N S_{espira} \text{sen}(\omega t)$

El valor máximo de voltaje es  $\varepsilon_{m\acute{a}x} = \omega B N S_{espira} = 100 \cdot \pi \cdot 1,00 \cdot 1000 \cdot \frac{20}{\pi} \cdot 10^{-4} = 200 \text{ V}$

Potencia disipada máxima  $P = V \cdot I = V^2/R = 200^2/500 = 80 \text{ W}$

Se pide máximo de potencia disipada, luego es para un valor instantáneo de voltaje y de intensidad, y no hay que considerar voltaje eficaz ni potencia promedio disipada aunque sea una tensión alterna.

15. Respuesta d. El punto de equilibrio es  $x=30 \text{ cm}$ , pero usamos las expresiones habituales con equilibrio en  $x=0$  y luego lo contemplamos al final. La fuerza máxima se produce en los puntos de máxima elongación

$|F_{m\acute{a}x}| = k \cdot A$ . La energía mecánica total coincide con la energía potencial elástica máxima y con la energía cinética máxima, luego podemos plantear

$$E_m = E_{pm\acute{a}x} = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{Sustituyendo} \quad E_m = \frac{1}{2} |F_{m\acute{a}x}| A \Rightarrow 0,020 = \frac{1}{2} 0,050 \cdot A \Rightarrow A = \frac{0,020 \cdot 2}{0,050} = 0,8 \text{ m}$$

De ahí podemos despejar  $k = m\omega^2 = |F_{m\acute{a}x}|/A = 0,050/0,8 = 0,0625 \text{ N/m}$

Si  $E_{pe} = 2E_c$ , como  $E_m = E_c + E_{pe} = E_c + 2E_c$  tenemos que

$$E_m = 3E_c = 3 \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) \Rightarrow 0,020 = \frac{3}{2} 0,0625 (0,8^2 - x^2) \Rightarrow x^2 = 0,8^2 - \frac{0,020 \cdot 2}{3 \cdot 0,0625} \Rightarrow x = \pm 0,65 \text{ m}$$

Pero esa distancia es respecto al punto de equilibrio, que es  $x=0,3 \text{ m}$ , luego serían  $+0,95 \text{ m}$  y  $-0,35 \text{ m}$

Entre las opciones que se proporcionan, la única válida es la d.

Comentario: no se usa explícitamente información enunciado asociada " $t=0$ " ni valor periodo  $2,0 \text{ s}$ .

16. Respuesta c. La cuerda se estira hasta el punto en el que toda la energía potencial gravitatoria (que es cinética parcialmente durante la caída) que tiene el saltador se almacena en energía potencial elástica de la cuerda en la posición más baja del salto. Tomando como referencia para energía potencial 0 en el punto en el que el saltador se detiene, antes del salto  $E_{pg} = mgh = 80 \cdot 9,81 \cdot (50+20) = 54936 \text{ J}$ . Si igualamos energías

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow k = \frac{2 \cdot 54936}{20^2} = 275 \text{ N/m}$$

17. "Respuesta b" (ver comentarios). Si la propagación es isotrópica, la distancia a la que se puede escuchar

el sonido de un foco sonoro  $I_0 = \frac{P}{4\pi r_{m\acute{a}x}^2} \Rightarrow r_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{P}{4\pi I_0}}$

Si queremos que la distancia  $r_{m\acute{a}x P}$  sea el doble que  $r_{m\acute{a}x 5W}$ , podemos plantear

$$r_{m\acute{a}x P} = 2 r_{m\acute{a}x 5W} \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{4\pi I_0}} = 2 \sqrt{\frac{5}{4\pi I_0}} \Rightarrow P = 4 \cdot 5 = 20 \text{ W}$$

Con este planteamiento no usamos el  $I_0$ , que se usaría para cálculos intermedios que no nos interesan. Si lo usásemos

$$r_{m\acute{a}x 5W} = \sqrt{\frac{5}{4\pi \cdot 10^{-12}}} = 6,3 \cdot 10^5 \text{ m} \quad 2 \cdot 6,3 \cdot 10^5 = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot 10^{-12}}} \Rightarrow P = (2 \cdot 6,3 \cdot 10^5)^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-12} \approx 20 \text{ W}$$

Si la potencia total son  $20 \text{ W}$ , hay que añadir una potencia en el foco de  $15 \text{ W}$

**El valor no coincide con ninguno de los 4 propuestos, pero tomamos el valor numéricamente asociado que sería b (sería válido si enunciado indicase  $0,5 \text{ W}$ )**

18. Respuesta c. Si utilizamos la ecuación de las lentes delgadas

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \text{y el aumento lateral en las lentes} \quad A = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = A s = \frac{2}{3}(-5) = \frac{-10}{3}$$

$$\frac{-3}{10} - \frac{1}{-5} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{-3+2}{10} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = -10 \text{ cm} \quad \text{Se trata de una lente divergente}$$

Si usamos una lente inversa, convergente,  $f=10 \text{ cm}$ , y  $A = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = A s = \frac{-2}{3} s$



$$\frac{-3}{2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{-3-2}{2s} = \frac{1}{10} \Rightarrow s = \frac{-50}{2} = -25 \text{ cm}$$

**Problema experimental EXP1.**

a) Para calcular la intensidad de corriente utilizamos la ley de Ohm,  $I=V/R$ , pero necesitamos conocer la resistencia, que podemos calcular con los datos de dimensiones y resistividad.

Lo planteamos de manera general en función de los valores dados: tensión  $V$ , diámetro  $D$ , resistividad  $\rho$  y longitud  $L$ .

$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{4}{\pi} \rho \frac{L}{D^2} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{\pi}{4} \frac{VD^2}{\rho L} = \frac{\pi}{4} \frac{125}{0,0175} \frac{10^2}{1,00} = 560998,7 \text{ A}$$

b) En los datos proporcionados no hay incertidumbre en  $V$  ni en la resistividad, por lo que los consideramos constantes que no intervienen en la incertidumbre.

Utilizamos el error absoluto máximo, considerando medidas independientes

$$dI = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial L} dL\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial D} dD\right)^2} \Rightarrow \Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial D} \Delta D\right)^2}$$

$$\Delta I = \frac{\pi V}{4\rho} \sqrt{\left(\frac{D^2}{L^2} \Delta L\right)^2 + \left(2 \frac{D}{L} \Delta D\right)^2} \Rightarrow \Delta I = \frac{\pi}{4} \frac{125}{0,0175} \sqrt{\left(\frac{10^2}{1^2} \cdot 0,01\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{10}{1} \cdot 0,1\right)^2}$$

$$\Delta I = 12544,3 \Rightarrow \Delta I = 1,25 \cdot 10^3 \text{ A}$$

Utilizando una única cifra significativa para el error  $I=661 \text{ kA} \pm 1 \text{ kA}$

**Problema experimental EXP2.**

La explicación breve del algoritmo seguido es buscar una relación lineal entre valores asociados a las medidas obtenidas y el índice de refracción buscado, para realizar una regresión lineal y obtener así su valor.

Si utilizamos la segunda ley de Snell de la refracción  $n_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) = n_2 \cdot \text{sen}(\theta_2)$

Tomando propagación de medio 1 a 2, siendo medio 1 el vidrio y medio 2 el aire, podemos plantear,  $n_1 = n_v$ ,  $n_2 = n_a$ ,  $\theta_1 = \alpha$ ,  $\theta_2 = \beta$ ,  $n_v \cdot \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta)$

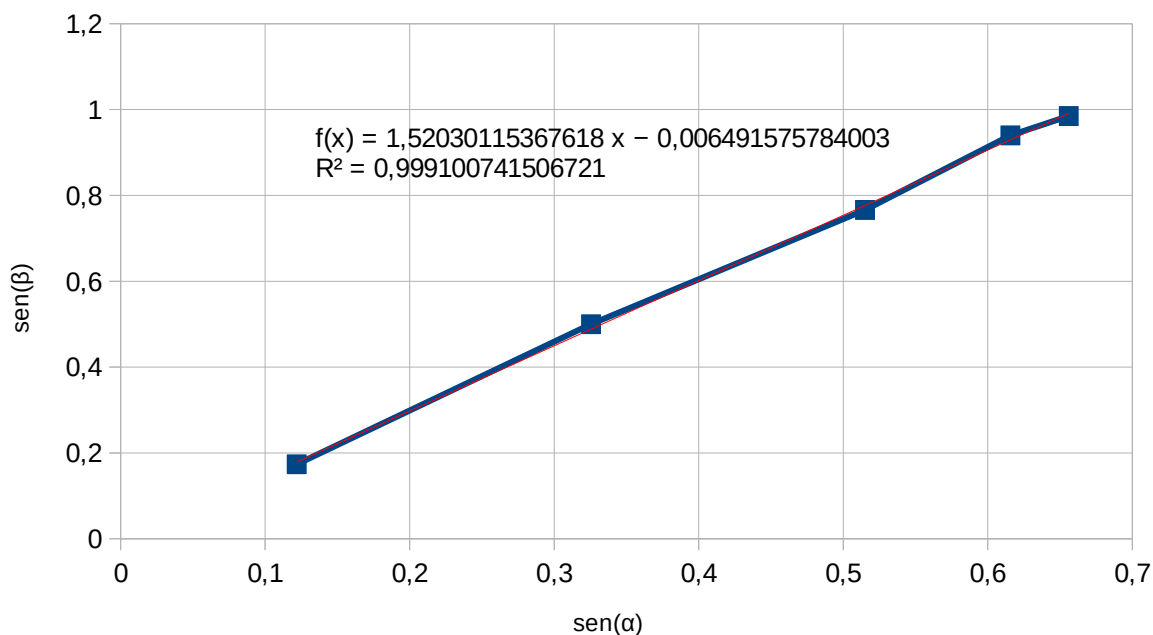
Si asociamos  $y = \text{sen}(\beta)$ ,  $x = \text{sen}(\alpha)$ ,  $y = n_v \cdot x$

Tenemos una ecuación de una recta en la que la pendiente es el índice de refracción buscado.

Operamos con los datos

$\alpha$ (°)	7	19	31	38	41
$\beta$ (°)	10	30	50	70	80
$\text{sen}(\alpha)$	0,12187	0,32557	0,51504	0,61566	0,65606
$\text{sen}(\beta)$	0,17365	0,50000	0,76604	0,93969	0,98481

Representamos (enunciado indica que se puede utilizar papel milimetrado).



Vemos que es aproximadamente una recta

Realizamos un ajuste por mínimos cuadrados para obtener el valor de índice de refracción más probable. Lo podemos realizar con la calculadora científica pero lo realizamos aquí con Wolframalpha que nos proporciona al mismo tiempo la representación gráfica

<http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{0.12187%2C0.17365}}+%2C+{{0.32557%2C0.5}}%2C+{{0.51504%2C0.76604}}%2C+{{0.61566%2C0.93969}}%2C+{{0.65606%2C+0.98481}}>

Con esto vemos que el valor de  $n_v$  es aproximadamente 1,52 que es un valor razonable para el vidrio.

Como el enunciado pide calcularlo con su incertidumbre, podemos aprovechar la representación gráfica. Reutilizando la idea indicada en la solución de Aragón 2011:

“Cuando se quiere hacer una estimación “manual” de la incertidumbre de una pendiente, normalmente se trazan las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a la serie de puntos experimentales y se obtiene la incertidumbre como

$$\Delta p = \frac{1}{2} (p_{\text{máx}} - p_{\text{mín}}) \quad “$$

Viendo la gráfica tomamos pendiente máxima entre los dos primeros puntos, y pendiente mínima entre el segundo punto y el punto 3.

$$p_{\text{máx}} = (0,50000 - 0,17365) / (0,32557 - 0,12187) = 1,602$$

$$p_{\text{mín}} = (0,76604 - 0,50000) / (0,51504 - 0,32557) = 1,404 \text{ cm/s}^2$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} (1,602 - 1,404) = 0,099$$

Indicamos la incertidumbre con una única cifra significativa y llegamos a  $n_v = 1,5 \pm 0,1$

Input interpretation:

fit	data	{{0.12187, 0.17365}, {0.32557, 0.5}, {0.51504, 0.76604}, {0.61566, 0.93969}, {0.65606, 0.98481}}
	model	linear function

Least-squares best fit:

$$1.5203 x - 0.00649256$$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R <sup>2</sup>	adjusted R <sup>2</sup>
-26.8499	-28.0216	0.999101	0.998801

Plot of the least-squares fit

