



Este documento es un borrador inicial; pendiente añadir más dibujos y diagramas

Cinemática

Se pretende hacer un resumen de teoría de **cinemática**: el estudio de los movimientos sin atender a las causas que los producen, por lo que no se entra en fuerzas (dinámica). La cinemática es tratada en Física y Química de 4º ESO y de 1º de Bachillerato, con distinta profundidad. Se intenta resumir a ese nivel con la partes comunes e indicando las diferencias. Como primera diferencia de planteamiento, se puede recalcar el diferente tratamiento del carácter vectorial de las magnitudes; solamente en 1º de Bachillerato se indica explícitamente *Iniciación al carácter vectorial de las magnitudes que intervienen*, considero que tanto en 4º como en 1º se indica y se debe indicar que las magnitudes son vectoriales (módulo, dirección y sentido), pero dejando el cálculo vectorial para Bachillerato, asociado a composición una vez que se maneja trigonometría.

1. Conceptos básicos. Elementos para describir un movimiento. Iniciación al carácter vectorial de las magnitudes que intervienen

El **movimiento** es la variación de la **posición** de un móvil con el **tiempo**.

- La **posición** es una magnitud vectorial que va desde el origen del **sistema de referencia** hasta dónde se encuentra el móvil. Se representa mediante \vec{r} y su módulo en el SI se mide en metros (m).
- El **tiempo** aquí se considera absoluto, sin ninguna consideración sobre relatividad del tiempo, que solamente hay que tener en cuenta para velocidades próximas a la de la luz, y que es distinta a la relatividad del movimiento. En el sistema internacional se mide en segundos (s).

El **sistema de referencia** se cita en la definición de posición, y definirlo es en cierto modo recursivo: es eje o conjunto de ejes de coordenadas (x, y, z) respecto a los que medimos la posición. Efectivamente ambos elementos están muy relacionados, y de esta relación surge la idea de movimiento relativo (relatividad que fue **aportación de Galileo Galilei**): la posición variará o no en función del sistema de referencia elegido.

Necesidad de posición como vector; resto de elementos son claramente vectores y parten de la posición.

Trayectoria es la línea que describe un móvil en su movimiento. Ejemplos: rectilínea, circular y parabólica. La trayectoria no basta para definir el movimiento: además hace falta aclarar como se recorre, y para ello se utilizan la velocidad y la aceleración.

La trayectoria se define matemáticamente de dos maneras:

- $x=x(t) / y=y(t) / z=z(t)$: Ecuaciones paramétricas de la trayectoria
- $f(x,y,z)=0$: Trayectoria expresada eliminando la dependencia del tiempo.

Desplazamiento es la variación de la posición $\Delta \vec{r} = \vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial}$ Es una magnitud vectorial.

Δ (“delta” mayúscula en griego) se utiliza para indicar diferencias o incrementos.

Espacio recorrido (s) es la cantidad de distancia recorrida a lo largo de la trayectoria. Es un una magnitud escalar, un número, no un vector.

Velocidad es el desplazamiento por unidad de tiempo. Es una magnitud vectorial; no basta con el módulo (SI: m/s), sino que hay que indicar qué dirección varía la posición y en qué sentido.

$$\text{Velocidad media } \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{Velocidad instantánea } \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La velocidad media no siempre es útil, ya que depende del tipo de movimiento y del intervalo de tiempo elegido. Por ejemplo en un MCU en el que el móvil de 1 vuelta cada segundo, si $\Delta t=1$ s, la v media será nula.

La velocidad instantánea (que es la que se asume si no se indica nada) es más útil porque no depende del intervalo de tiempo, pero implica el cálculo de un límite (*Bachillerato: derivada*) de un vector. A nivel práctico lo importante es saber que siempre es tangente a la trayectoria y su módulo indica la velocidad en un punto concreto de la trayectoria. $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{u}_t = v \vec{u}_t$

El concepto de velocidad habitual, el que marcan los velocímetros de los vehículos, no es un vector sino un número. A veces se habla de velocidad escalar o celeridad, definiendo esta como el módulo de la velocidad, o como el espacio recorrido por unidad de tiempo.

Aceleración es la variación de la velocidad con el tiempo. Es una magnitud vectorial; no basta con el módulo (SI: m/s²), sino que hay que indicar en qué dirección varía la velocidad y en qué sentido.

$$\text{Aceleración media } \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{Aceleración instantánea } \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Se suele utilizar la aceleración instantánea, en la que se suelen considerar dos componentes llamadas “intrínsecas”, que surgen de descomponer el vector aceleración en una parte tangente a la trayectoria y en otra parte perpendicular (normal) a la trayectoria.



(Bachillerato: las expresiones se obtienen derivando $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$. $a_t = \frac{dv}{dt}$ $a_n = \frac{v^2}{R}$)

La **aceleración tangencial** es tangente a la trayectoria y mide lo que varía el módulo de la velocidad, ya que la velocidad instantánea es también tangente a la trayectoria.

La **aceleración normal** es perpendicular a la trayectoria (y dirigida hacia la parte cóncava) y mide lo que varía la dirección de la velocidad. En el caso de movimiento circular esa aceleración se llama centrípeta (está dirigida hacia el centro). Conceptualmente se puede ver que si el radio R es muy pequeño o v es grande, el cambio en la velocidad como vector es muy grande, y por ello la aceleración normal es grande.

Por la propia definición de las componentes intrínsecas tenemos $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \Rightarrow a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ Como ambas componentes son perpendiculares entre sí, se suele trabajar con los módulos.

2. Movimientos con trayectoria rectilínea

En el caso de que la trayectoria sea rectilínea, tenemos simplificaciones importantes:

Tomamos como sistema de referencia unidimensional el eje x de modo que coincida con la recta del movimiento, por lo que a efectos prácticos no usamos vectores, usamos x en lugar de \vec{r}

-El módulo de la posición lo indica la coordenada respecto al eje x.

-La dirección está dada por el propio eje x y no hay que indicarla.

-El sentido está dado por el signo: valores positivos son hacia x positivas y negativos hacia x negativas.

No tenemos aceleración normal, ya que no hay cambio de dirección

El espacio recorrido, si no hay cambios de sentido, es $s = x - x_0$. **$s=x$ solo si $x_0=0$, pero no siempre es así.**

Al describir un movimiento es habitual representar aceleración/tiempo, velocidad/tiempo y espacio/tiempo.

Estas gráficas suelen estar asociadas a movimientos rectilíneos, pero podrían aplicar a otros tipos. La velocidad instantánea se puede ver como la pendiente de la tangente en la curva x-t (Bachillerato: derivada)

2.1. MRU: Movimiento Rectilíneo Uniforme. Ecuaciones y gráficas

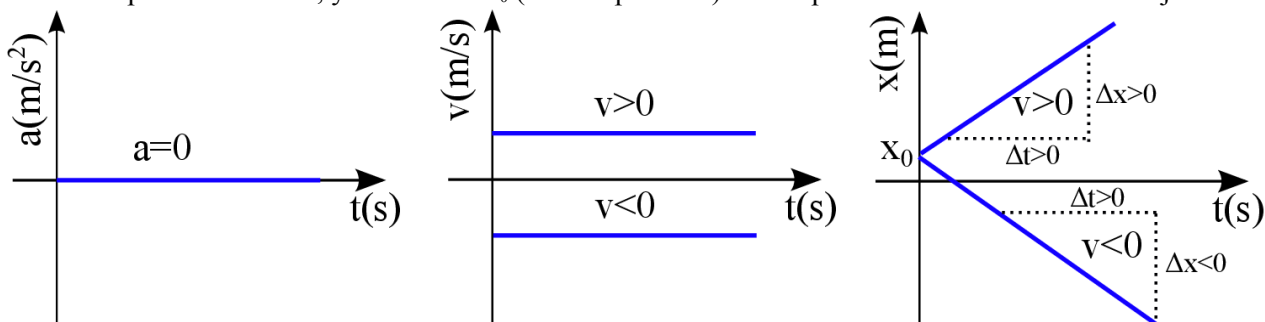
Se trata del caso en el que la velocidad es constante y la aceleración (como vector) es nula.

Las ecuaciones son $v = cte$
 $x = x_0 + v \cdot t$. Se deduce partiendo de $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$ y asumiendo $t_0=0$.

Es habitual conocer la expresión $v = \frac{e}{t}$ y es importante ver que es la misma ecuación anterior pero donde

se asume que además de $t_0=0$, se asume $x_0=0$ y $x=e$, ó que directamente se está manejando $e=s$.

Las gráficas para MRU serán: aceleración nula, velocidad constante, y espacio línea recta, cuya pendiente viene dada por la velocidad, y el valor de x_0 (valor x para $t=0$) será el punto de corte de la recta en eje x.



2.2. MRUA: Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado. Ecuaciones y gráficas

Se trata del caso en el que la aceleración (como vector) es constante (puede ser positiva o negativa).

$$v = v_0 + a \cdot t$$

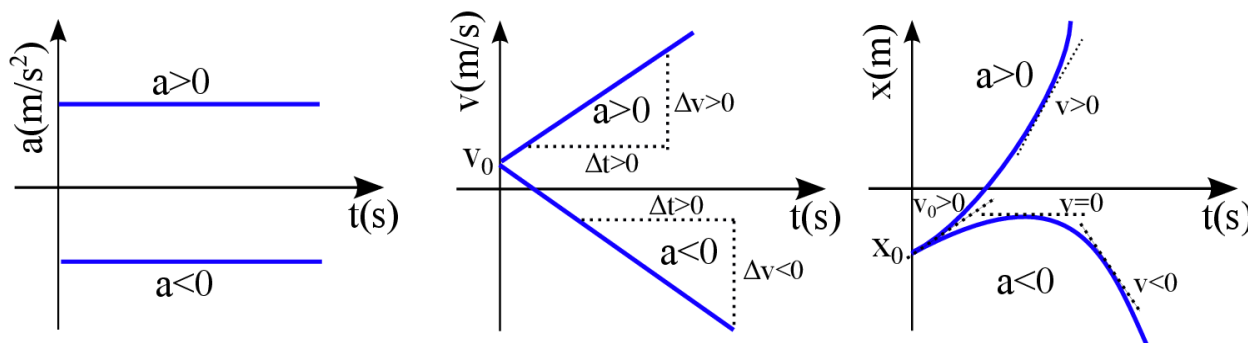
Las ecuaciones son $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$. Expresiones que asumen de nuevo $t_0=0$.

Ecuación de especial interés donde se quita dependencia de tiempo: $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

Es interesante ver el caso MRU como un caso especial con aceleración constante con valor $a=0$: las ecuaciones de MRUA sustituyendo el valor $a=0$ se convierten en las ecuaciones de MRU.

Las gráficas para MRUA serán: aceleración constante (positiva o negativa), velocidad línea recta, cuya pendiente viene dada por la aceleración, y el valor de v_0 (valor v para $t=0$) será el punto de corte de la recta en eje v. La posición será una parábola “con las patas hacia arriba” si $a>0$ y “con las patas hacia abajo” si $a<0$, tomando distintos tramos de la parábola en función de los valores de x_0 y de v_0 .

4º ESO: es más sencillo representar solamente los casos $v_0=0$ y $x_0=0$, más sencillos y visualizables.



3. Movimientos circulares. Magnitudes lineales y angulares.

En el caso de que la trayectoria sea circular, usar como coordenadas x e y es poco útil, y se suelen utilizar coordenadas polares: ángulo y radio (que en trayectoria circular es R constante). Manejamos nuevas **magnitudes angulares** para rotación, que se pueden relacionar con las **magnitudes lineales** de traslación:

Traslación	Rotación	Definición	Unidades SI	Relación
s	θ (zeta)	Posición angular / ángulo recorrido	rad (radianes)	$s = \theta R$
v	ω (omega)	$\omega = d\theta/dt = v/R$ velocidad angular	rad/s	$v = \omega R$
a	α (alfa)	Aceleración angular	rad/s ²	$a_t = \alpha R$

Recordando la relación es sencillo asociar ecuaciones para MCU y MCUA con de las de MRU y MRUA, “intercambiando” las magnitudes de traslación por las de rotación.

$$a = 0 \qquad \alpha = 0 (a_t = 0)$$

MRU $v = cte$ pasa a ser en MCU $\omega = cte$ (donde también se asume $t_0 = 0$)
 $x = x_0 + v \cdot t$ $\theta = \theta_0 + \omega \cdot t$

MRUA $a = cte$ pasa a ser en MCUA $\alpha = cte$
 $v = v_0 + a \cdot t$ $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$
 $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

El MCU es un movimiento periódico en el que se pueden realizar definiciones y relaciones adicionales:

- **Periodo** $T =$ tiempo en completar una vuelta (SI: s)
- **Frecuencia** $f = 1/T =$ número de vueltas en 1 segundo (SI: 1/s = Hz). En el caso de MCU se suele hablar de vueltas/s, aunque el concepto de frecuencia en Hz es genérico.
- **Velocidad angular** $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, ya que una vuelta son 2π rad.

Se asume manejo de radianes y su equivalencia con vueltas (2π rad = 1 vuelta) y grados (2π rad = 360°). Importante saber manejar la calculadora para usar radianes y grados según se necesite.

Bachillerato: la periodicidad del MCU se puede utilizar para mostrar que sus componentes son funciones trigonométricas periódicas, e introducir el movimiento armónico simple como caso especial de rectilíneo.

Es importante tener en cuenta que en el movimiento circular la aceleración normal nunca es nula, tiene valor $a_n = v^2/R$: es constante en MCU (donde v, módulo de velocidad, es constante) pero no en MCUA. La expresión $a_t = \alpha R$ es para aceleración tangencial, y es nula en MCU.

A veces se utiliza indistintamente θ (zeta) ó ϕ (fi) para hacer referencia a posición angular o ángulo recorrido, según el caso, sobreentendiéndose a qué se hace referencia.

4. Des/composición/Superposición de movimientos (Bachillerato)

Cualquier movimiento se puede descomponer en varios movimientos asociados a los ejes perpendiculares del sistema de referencia (2 en el plano, o 3 en el espacio). Eso permite manejar las ecuaciones de movimiento para cada eje (x, y, z) por separado.

También se puede ver a la inversa, que es el principio de superposición: si un móvil es sometido a varios movimientos independientes, el movimiento resultante es la suma vectorial de ambos movimientos, y aplica a posiciones, desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

El caso más habitual es el movimiento parabólico: composición de MRU y MRUA en ejes perpendiculares, elegidos para que el movimiento sea en un plano. Es útil para describir la trayectoria de móviles bajo la acción de gravedad constante. Las ecuaciones son las de MRU y MRUA para cada eje (x e y). El signo de las velocidades y de la aceleración de la gravedad dependerá según la elección de los ejes.



5. Tipología de problemas cinemática, situaciones cinemáticas de interés

5.1 Tipos de problemas con cálculo vectorial

(Bachillerato, los alumnos deben saber derivar y tener manejo de cálculo vectorial) Son problemas donde se da el valor del vector posición en función del tiempo y hay que calcular otros valores vectoriales o derivados: velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media, aceleración instantánea, componentes intrínsecas de la aceleración o ecuación de la trayectoria.

5.2 Tipos de problemas MRU y MRUA y composición de ambos

Dada la sencillez de las ecuaciones para MRU, no tienen mayor complejidad que problemas en los que se combinan espacio, tiempo y velocidad, conociendo dos de ellos se averigua el otro.

En el caso de MRUA, se pueden considerar cuatro tipos de problemas:

- Aceleraciones a ritmo constante: ejemplo coche pasa uniformemente 0 a 100 km/h en cierto tiempo.
- Frenadas a ritmo constante, cálculo de **espacio de frenado**: ejemplo coche pasa uniformemente de 90 a 20 km/h en cierto tiempo.
- Tiro vertical: lanzar un objeto verticalmente con cierta velocidad inicial, y es frenado/acelerado uniformemente por la aceleración de la gravedad (de módulo $9,8 \text{ m/s}^2$).
- Caída libre: se deja caer un objeto y es acelerado uniformemente por la aceleración de la gravedad.

En los casos de movimiento rectilíneo vertical (caída libre, tiro vertical) el uso del eje x puede resultar confuso ya que en matemáticas el eje vertical se suele representar como y , pero es así porque en movimiento rectilíneo solamente hay una coordenada que suele ser la x . Lo que sí es importante siempre es la elección del sistema de referencia que implica sentido positivo del eje de coordenadas y punto de referencia: la aceleración puede ser positiva o negativa en función de cómo definamos el eje x , y la posición inicial puede ser 0, positiva o negativa en función de dónde pongamos el sistema de referencia.

Problemas comunes a MRU y MRUA son:

- Dadas representaciones de gráficas a - t , v - t y/o x - t y obtener información de ellas; distintos tramos, a/v /espacio recorrido en cada tramo. O bien dadas las ecuaciones, obtener las representaciones.
- Alcance entre dos móviles ambos con movimiento rectilíneo: el “alcance” es realmente que ambos móviles estén en la misma posición al mismo tiempo. Se trata de plantear las ecuaciones de ambos movimientos e igualar la posición. Pueden surgir combinaciones de MRU-MRU, MRU-MRUA ó MRUA-MRUA (las combinaciones con MRUA son más complejas y mejor dejarlas para Bachillerato). A nivel gráfico se puede ver como representar las gráficas x - t de ambos móviles y ver en qué punto (instante y posición) se cortan.

(Bachillerato: es necesario el uso de trigonometría para descomponer vectores en los ejes de coordenadas. Importante manejo de calculadora con radianes y grados para cálculos de trigonometría)

En los problemas de **superposición de movimientos** se suele hablar de varias tipologías: **tiro horizontal**, **tiro oblicuo** hacia arriba y hacia abajo, pero realmente son **casos particulares** de un caso genérico con distintos valores de ángulo de partida. Los problemas pueden variar en planteamiento matemático: dar ciertos datos y pedir otros, lo típico es dar altura de lanzamiento, ángulo de lanzamiento, velocidad inicial y altura de llegada, pidiendo altura máxima y alcance o momento de llegada, pero también se puede pedir averiguar el ángulo de lanzamiento, la velocidad inicial, altura de lanzamiento, altura de llegada, o hallar el valor de g .

5.3 Tipos de problemas MCU y MCUA

Dada la sencillez de las ecuaciones para MCU, los problemas en los que se traten ángulo recorrido, tiempo y velocidad angular no tienen complejidad.

Es habitual partir de movimientos circulares periódicos para obtener a partir de ellos el periodo, la frecuencia y la velocidad angular. Ejemplos son la rotación de la Tierra con $T=24 \text{ h}$ y la rotación de objetos que giran a velocidad angular constante como un disco, un tiovivo, una rueda.

Ejemplos típicos de MCUA son el arranque y frenada de un ventilador.

Un tipo de problema habitual combina traslación con rotación: si hay una traslación en la que un vehículo tiene ruedas y estas giran sin deslizar, se pueden relacionar magnitudes de traslación y rotación: por ejemplo si la distancia recorrida por el vehículo es $2\pi R$, las ruedas habrán dado una vuelta completa. En función de si el vehículo realiza MRU ó MRUA, las ruedas describirán un MCU ó MCUA.