Planteamiento

Este problema se puede considerar de repaso, ya que combina varios bloques vistos inicialmente sin relacionarlos, gravitación y MAS, y que es interesante para asociar el MAS a cosas distintas de muelles. Es un problema especial ya que hay pocos similares que combinen al mismo tiempo estas ideas.

Enunciado

Suponiendo que la Tierra es una esfera de densidad uniforme, se perfora un agujero hacia el centro de la Tierra, de modo que se conectan dos puntos en las antípodas. Se deja caer una masa con velocidad inicial nula.
a) Demostrar que dentro del agujero describe un MAS en el que el punto de equilibrio es el centro de la tierra.
b) Calcular el valor k de la fuerza recuperadora asociada a la gravedad en el interior del planeta, donde F = -k·x, siendo x la distancia al centro, si la masa es de 1 kg.
c) El valor del campo gravitatorio a una distancia x del centro.
Sobre el MAS que describe, calcular:
d) La frecuencia de oscilación y el periodo
e) La aceleración máxima, la amplitud y la fase inicial
f) La expresión de la velocidad respecto a la posición.
g) En qué punto es máxima la Energía cinética de la masa que describe el MAS.
Datos: g en superficie terrestre = 9,8 m/s^2. Radio de la Tierra: 6378 km.

Solución

a) Es un MAS si se cumple que $a = -\omega^2 \cdot x$, o lo que es lo mismo $F = -k \cdot x$
En el interior de la Tierra, a una distancia x del centro, la fuerza gravitatoria F_g depende sólo de la masa interior (se puede razonar por geometría, o matemáticamente con el teorema de Gauss)
Asumiendo densidad uniforme y esfera perfecta, para una distancia x
(Tomamos eje x con origen en el centro de la Tierra y x positivas hacia afuera, por lo que expresando F(x) como escalar, el signo menos indica que va dirigido hacia el centro de la Tierra

$$M=\rho \cdot Vol \Rightarrow M(x)=\rho \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$F(x)=-g(x)m=-G\frac{M(x)}{x^2}m=-Gm\rho\frac{4}{3}\pi\frac{x^3}{x^2}=-kx \quad \text{dónde} \quad k=Gm\rho\frac{4}{3}\pi$$

Usando la expresión de la densidad y del campo gravitatorio, podemos reescribir la expresión de la constante elástica k de este MAS

$$\left.\begin{array}{l}\rho=\dfrac{M_T}{V_T}=\dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \\ g_T=G\dfrac{M_T}{R_T^2}\end{array}\right\} \Rightarrow k=\frac{g_T \cdot m}{R_T}$$

b) Para este caso $k=\dfrac{9,8 \cdot 1}{6,378 \cdot 10^6}[N/m]$
(Se puede llegar a la misma expresión con desarrollo similar al apartado a) (una vez demostrado que es MAS))

$$Amplitud=x_{máx}=R_T$$

$$F_{máx}=m \cdot a_{máx}=-k x_{máx};1 \cdot 9,8=-k \cdot 6378 \cdot 10^3;k=1,54 \cdot 10^{-6}\,N/m$$

c) $g(x)=\frac{F(x)}{m}=\frac{-kx}{m}=\frac{-g_T \cdot m}{R_T}\frac{x}{m}=\frac{-g_T}{R_T}x=\frac{-9{,}8}{6{,}378\cdot 10^6}x[m/s^2]$

Se puede ver que el campo decrece linealmente desde x=0 (el campo es nulo en el centro de la Tierra) hasta $x=R_T$ (el campo tiene el valor -9,8 m/s^2 para $x=R_T$)

$$a=-\omega^2 x; a=\frac{F}{m}=\frac{-kx}{m}=\frac{-g_T}{R_T}x$$

d)

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g_T}{R_T}}=1{,}24\cdot 10^{-3} rad/s; f=\frac{\omega}{2\pi}=1{,}98\cdot 10^{-4} Hz; T=\frac{1}{f}=5063\,s\approx 1{,}4\,h\approx 84\,min$$

Se puede ver como la frecuencia no depende de la masa colocada

e)

$$a_{max}=9{,}8\,m/s^2;\quad A=6{,}378\cdot 10^6 m=\frac{a_{max}}{\omega^2}$$

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0); t=0\rightarrow x=A=A\cos\phi_0\rightarrow\phi_0=\arccos(1)=0$$

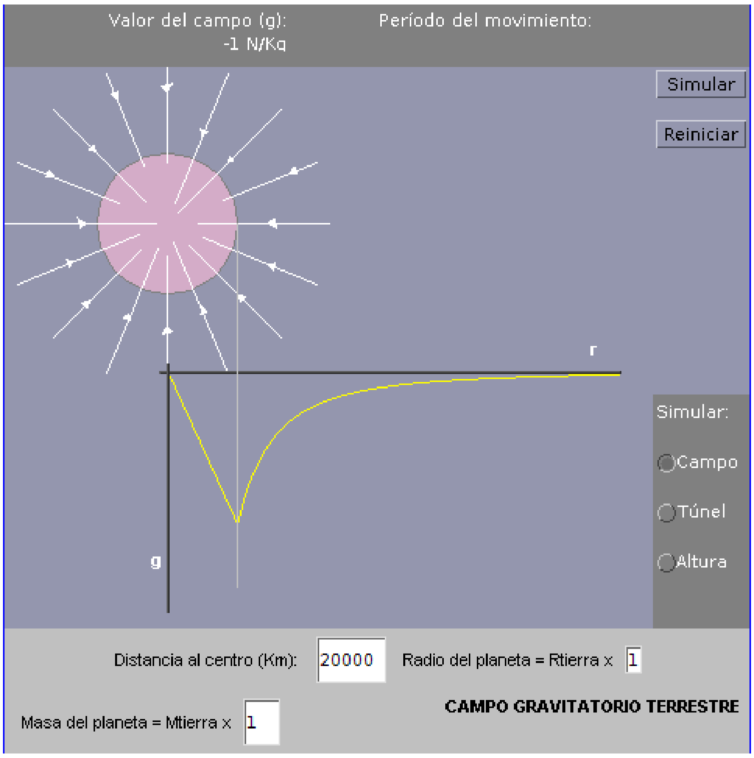
f) $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm 1{,}24\cdot 10^{-3}\sqrt{(6{,}378\cdot 10^6)^2-x^2}\,m/s$

g) La E_c es máxima en el centro de la tierra, que es la posición de equilibrio y donde E_p=0

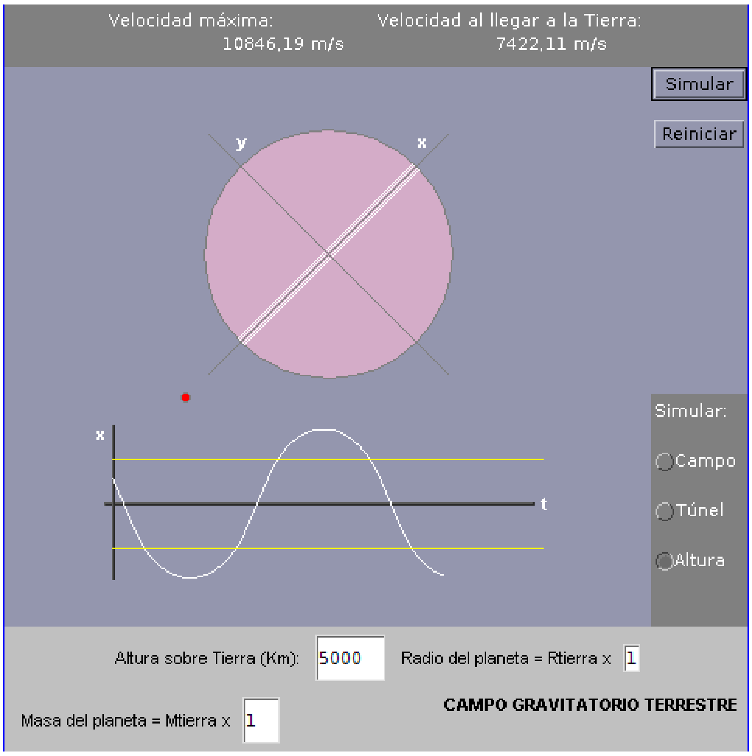
Anexo:

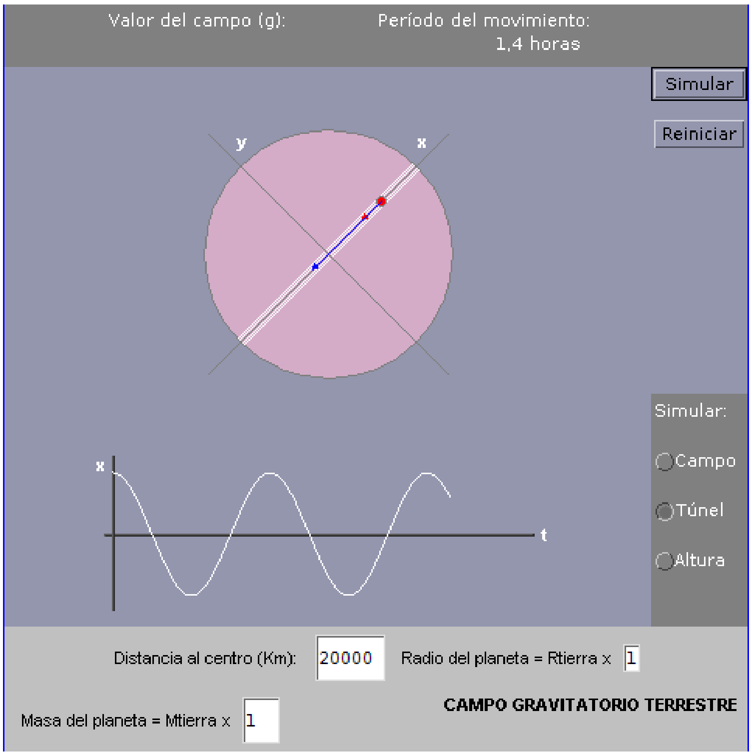
Se puede ver una simulación asociada en

http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/campo_gravitatorio_prob/applet2.html Mª Josefa Grima y Javier Soriano, cc-by-nc-sa



Reutilizando ideas de esta simulación, se puede ampliar lanzando la masa desde cierta altura en lugar de hacerlo desde la superficie: habrá una velocidad de llegada a la superficie de la Tierra no nula, y la velocidad máxima será distinta, no describirá exactamente un MAS, ya que fuera de la Tierra el movimiento es MRUA, un "tiro vertical"


Velocidad máxima:
10846,19 m/s
Velocidad al llegar a la Tierra:
7422,11 m/s
Simular
Reiniciar
y
x
x
t
Simular:
Campo
Túnel
Altura
Altura sobre Tierra (Km):
5000
Radio del planeta = Rtierra x
1
CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE
Masa del planeta = Mtierra x
1


Valor del campo (g):
Período del movimiento:
1,4 horas
Simular
Reiniciar
y
x
x
t
Simular:
Campo
Túnel
Altura
Distancia al centro (Km):
20000
Radio del planeta = Rtierra x
1
CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE
Masa del planeta = Mtierra x
1