Problema gravitación 3
enrique@fiquipedia.es Revisado 14 noviembre 2016

Planteamiento

Se encuadra dentro del bloque de gravitación de 2º de Bachillerato, lo creé en un examen de 2º de Bachillerato en noviembre de 2014 asociado a un hecho reciente comentado en clase. Sirve para citar la idea de basura espacial, visualizar la idea de cambio de órbita de una manera no abstracta, y conocer datos aproximados de la Estación Espacial Internacional (masa, altura, periodo)
Revisado en 2016, se puede considerar asociado a estándares de aprendizaje evaluables LOMCE
a EAE 5.1 velocidad orbital
b CE 4 Variaciones energéticas (EAE 4.1 lo acota a conservación E_m movimiento orbital)
c EAE 3.1 Velocidad de escape (se consideran análogos satelización, cambio órbita, lanzamiento)

Enunciado

El 6 de noviembre de 2014 la Estación Espacial Internacional (ISS) realizó una maniobra de evasión para elevar la estación de 450 toneladas 1 km, evitando la colisión con un trozo del satélite ruso Cosmos-2251


ISS. NASA, public domain

a) Calcula la altura de la órbita si completa una vuelta cada 92 minutos.
b) Calcula la energía empleada en el cambio de órbita.
c) Calcula la velocidad que debería darse a la ISS en la maniobra de evasión para que escapase de la gravedad de la Tierra.
Datos: R_{Tierra} = 6370 km; M_{Tierra} = 5,98·10^{24} kg.
G=6,67·10^{-11} kg m^2 kg^{-2}

Solución

a) En una órbita circular la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta, igualando módulos y llamando R_o al radio de la órbita, $R_o=R_T+h$

$$F_c=F_g$$

$$m_{ISS}\frac{v^2}{R_o}=G\frac{M_T m_{ISS}}{R_o^2}\Rightarrow v^2=G\frac{M_T}{R_o}\Rightarrow R_o=G\frac{M_T}{v^2}$$

Como es un movimiento circular $v=\frac{2\pi R_o}{T}$ Sustituyendo

$$R_o=G\frac{M_T T^2}{(2\pi R_o)^2}\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot10^{24}\cdot(92\cdot69)^2}{4\cdot\pi^2}}=6{,}752\cdot10^6 m$$

h=6752-6370=382 km

b) Calculamos la diferencia energía mecánica en ambas órbitas. Podemos calcular por separado energía potencial y energía cinética y llegar a la expresión de la energía mecánica en una órbita circular, que utilizamos directamente $E_m=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$

$$\Delta E_m=\frac{1}{2}GMm\left(\frac{-1}{R_{órbita\,final}}-\left(\frac{-1}{R_{órbita\,inicial}}\right)\right)$$

$$\Delta E_m=\frac{1}{2}\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot450\cdot10^3\cdot\left(\frac{1}{6{,}752\cdot10^6}-\frac{1}{6{,}752\cdot10^6}\right)=1{,}97\cdot10^9 J$$

c) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, que llevaría a la expresión:

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Pero este caso es distinto: no se trata de la superficie del planeta, sino de una órbita, donde la expresión de la energía mecánica inicial es la mitad respecto a solamente la potencial a esa distancia (en superficie $E_m=E_p=\frac{-GMm}{R}$ en órbita $E_m=E_p+E_c=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$)

Tras operar, la velocidad de escape en este caso es $v_e=\sqrt{\frac{GM}{R}}$

$$v_e(6{,}752\cdot 10^6 m)=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}752\cdot 10^6}}=7686\, m/s$$

(Inferior al valor en superficie de la Tierra, que son 11,2 km/s)