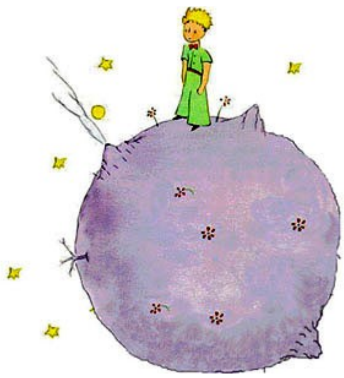
Problema gravitación 2
enrique@fiquipedia.es Revisado 19 febrero 2016

Planteamiento

Se encuadra dentro del bloque de gravitación de 2º de Bachillerato, lo creé en un examen de 1º de Bachillerato en mayo de 2013 centrado en la parte cualitativa. Me parece interesante que los alumnos se planteen cómo analizar físicamente una imagen asociada a literatura que casi todos ellos conocen; el principito en la Tierra anda de la misma manera que en su asteroide, luego se supone que está sometido a una gravedad "similar" en ambas situaciones.
En 1º de Bachillerato se pueden tratar sin conocer la expresión de la energía potencial en función de la distancia, pero sí visualizando que el módulo del campo no es constante, y con razonamientos cualitativos como acotar un tiempo máximo y mínimo de caída. En 2º de Bachillerato sí se puede calcular trabajo a realizar, y para el tiempo ver cómo se puede estimar, con la posibilidad de acercar a los alumnos al cálculo integral asociado según se vea a los alumnos.
Permite ver la importancia de asumir o no modelo puntual, ya que actualmente en secundaria y Bachillerato se usa modelo puntual salvo cuando se tratan las palancas.
También sirve para usar una imagen y citar derechos de autor, se incluye una imagen que puede tener derechos de autor, pero existe el derecho a ilustración en la enseñanza
El texto del principito sí es libre desde 2013 http://www.dmrights.com/es/noticias-sobre-propiedad-intelectual/item/304-el-principito-cumple-70-anyos-y-para-festejarlo-liberaran-sus-derechos-de-autor.html
Este problema puede sugerir más ideas: viabilidad física de la atmósfera, qué altura y temperatura tendría que tener para que el gas no escapase, qué variación de densidad habría con la altura….
Sometiendo a Google mi idea he visto que no soy el primero, Sergio L. Palacios @pr3cog ya tuvo la idea de analizar la física asociada, https://books.google.es/books?id=dja44pppJKsC&pg=PA84 capítulo 13 El final de la física (tal y como la conocemos)
http://www.cienciakanija.com/2009/11/06/la-guerra-de-dos-mundos-de-sergio-l-palacios/

Enunciado

El principito vive en el asteroide B612, con un radio de 5 m como se ve en el dibujo.
a) Calcula la masa de su asteroide si su peso en su asteroide es el mismo que en la Tierra. Usando ese dato de masa comparar la densidad del asteroide con la de la Tierra.
b) Calcula el peso de una moneda de 5 g en su mano a 1 m de altura y en el suelo de su planeta.
c) Razona cómo sería el movimiento de caída de la moneda de 5 g desde 1 m al suelo e indica un tiempo aproximado de caída.
d) Calcula el trabajo realizado por el campo para llevar la moneda desde 1 m hasta el suelo
e) Calcula el tiempo exacto de caída desde 1 m hasta el suelo.



http://www.lepetitprince.com/

Datos: aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra g= 9,8 m/s², G=$6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$, Masa de la Tierra $M_T=5{,}98\cdot10^{24}$ kg,
Nota: asumir modelo de partícula para los objetos, situados en la superficie del asteroide/planeta si no se indica lo contrario.

Solución

a) Usando la ley de gravitación universal.

$$g_{asteroide}=G\frac{M_{asteroide}}{R^2_{asteroide}}\Rightarrow 9{,}8=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{M_{asteroide}}{5^2}\Rightarrow M_{asteroide}=3{,}67\cdot10^{12}\,kg$$

La densidad media del asteroide sería increíblemente alta $\rho_{asteroide}=\frac{3{,}67\cdot10^{12}}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot5^3}=7\cdot10^9\frac{kg}{m^3}$

Para calcular la densidad de la Tierra necesitamos conocer su radio, que no se da como dato pero podemos deducir de los datos: $g_T=G\frac{M_T}{R_T^2}\Rightarrow R_T=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{9{,}8}}=6{,}38\cdot10^6\,m$

$$\rho_T=\frac{5{,}98\cdot10^{24}}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(6{,}38\cdot10^6)^3}=5{,}5\cdot10^3\frac{kg}{m^3}$$

b) La gravedad no tiene el mismo valor a 1 m de altura que en la superficie, que es 9,8 m/s^2.

$$g_{asteroide\,1\,m}=G\frac{M_{asteroide}}{(R_{asteroide}+1)^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3{,}67\cdot10^{12}}{(5+1)^2}\Rightarrow g_{asteroide\,1\,m}=6{,}8\frac{m}{s^2}$$

$P_{superficie}$=m·$g_{asteroide}$=0,005·9,8=0,049 N

P_{1m}=m·$g_{asteroide1m}$=0,005·6,8=0,034 N

c) No realiza un MRUA porque la aceleración de la gravedad no es constante, es mayor cuanto más cerca de la superficie. La caída será rectilínea; aceleración radial hacia centro del planeta.

Para dar un tiempo aproximado de caída, podemos calcular el tiempo que tardaría con la aceleración inicial y con la aceleración final si fueran MRUA, y será un valor intermedio (la velocidad es la el área bajo la curva x-t, y la acleración el área bajo la curva v-t)

Sustituimos x=1 m en la expresión para un MRUA y velocidad inicial cero x=1/2·a·t^2

Con la g en superficie: 1=1/2·9,8·t^2 → t=0,45 s

Con la g a 1 m altura: 1=1/2·6,8·t^2 → t=0,54 s

d) El trabajo realizado por el campo está asociado a la variación de energía potencial.

$$W_{campo}(1\,m\rightarrow suelo)=-\Delta E_p=-(E_p(suelo)-E_p(1\,m))=-(-G\frac{Mm}{R_{suelo}}-(-G\frac{Mm}{R_{1\,m}}))$$

$$W_{campo}(1\,m\rightarrow suelo)=GMm(\frac{1}{R_{suelo}}-\frac{1}{R_{1\,m}})=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3{,}67\cdot10^{12}\cdot0{,}005(\frac{1}{5}-\frac{1}{5+1})=2{,}97\cdot10^{-2}\,J$$

Positivo, a favor del campo.

e) Para calcular el tiempo de caída hay que saber la aceleración en cada instante, y plantear un cálculo integral / diferencial. Tomamos r positivos hacia afuera, por lo que la velocidad y la aceleración son negativas.

$$a=-G\frac{M}{r^2}\Rightarrow\frac{dv}{dt}=-G\frac{M}{r^2}\Rightarrow\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=-G\frac{M}{r^2}\Rightarrow v\,dv=-G\frac{M}{r^2}dr$$

$$\int v\,dv=-G\,M\int\frac{1}{r^2}dr\Rightarrow\frac{v^2}{2}=\frac{GM}{r}+cte_1$$

Usamos el dato de que cuando r=6 m, la velocidad es nula.

$$GM=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3{,}67\cdot10^{12}\approx244{,}8$$

$$cte_1=\frac{-GM}{r}=\frac{-244{,}8}{6}\approx-40{,}8\frac{m}{s}$$

$$v^2=2(\frac{244{,}8}{r}-40{,}8)=\frac{489{,}6}{r}-81{,}6=\frac{489{,}6-81{,}6r}{r}$$

Tomamos raíz cuadrada y velocidad negativa

$$v=\frac{dr}{dt}=-\sqrt{\frac{489{,}6-81{,}6r}{r}}\Rightarrow\sqrt{\frac{r}{489{,}6-81{,}6r}}dr=-dt\Rightarrow-t=\int\sqrt{\frac{r}{489{,}6-81{,}6r}}dr$$

Integral no inmediata. Se puede consultar la solución final, pero se desarrolla

enrique@fiquipedia.es Revisado 19 febrero 2016

http://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+sqrt%28x%2F%28a-bx%29%29

$I=\int\sqrt{\frac{x}{a-bx}}dx$ Donde a =489,6 y b=81,6

Paso 1: cambio de variable $t=\sqrt{\frac{x}{a-bx}}\Rightarrow t^2=\frac{x}{a-bx}\Rightarrow x+t^2bx=t^2a\Rightarrow x=\frac{t^2a}{1+t^2b}$

$dx=\frac{2at(1+t^2b)-t^2a2bt}{(1+t^2b)^2}dt=\frac{2at}{(1+t^2b)^2}dt$ Tras sustituir $I=\int t\frac{2at}{(1+t^2b)^2}dt=2a\int\frac{t^2}{(1+t^2b)^2}dt$

$u=t\Rightarrow du=dt$

Paso 2: por partes $dv=\frac{t}{(1+t^2b)^2}dt\Rightarrow v=\int\frac{t}{(1+t^2b)^2}dt=\frac{-1}{2b}\cdot\frac{1}{(1+t^2b)}$ $\int udv=uv-\int vdu$

$$2a\int\frac{t^2}{(1+t^2b)^2}dt=2a[\frac{-t}{2b(1+t^2b)}+\frac{1}{2b}\int\frac{1}{1+t^2b}dt]=\frac{a}{b}[\frac{-t}{1+t^2b}+\frac{\arctan(\sqrt{b}t)}{\sqrt{b}}]$$

Deshacemos el cambio de variable de paso 1

$$\frac{a}{b}[\frac{-\sqrt{\frac{x}{a-bx}}}{1+(\frac{x}{a-bx})b}+\frac{1}{\sqrt{b}}\arctan(\sqrt{b}\sqrt{\frac{x}{a-bx}})]+cte_2$$

$$\frac{a}{b}[-\sqrt{\frac{x}{a-bx}}\cdot\frac{(a-bx)}{(a-bx+bx)}+\frac{1}{\sqrt{b}}\arctan(\sqrt{b}\sqrt{\frac{x}{a-bx}})]+cte_2$$

$$\frac{a}{b}[\frac{-\sqrt{x}}{a}\sqrt{a-bx}+\frac{1}{\sqrt{b}}\arctan(\sqrt{b}\sqrt{\frac{x}{a-bx}})]+cte_2$$

Sustituimos a =489,6 y b=81,6

$$-t=\frac{489{,}6}{81{,}6}[\frac{-\sqrt{x}}{489{,}6}\sqrt{489{,}6-81{,}6x}+\frac{1}{\sqrt{81{,}6}}\arctan(\sqrt{81{,}6}\sqrt{\frac{x}{489{,}6-81{,}6x}})]+cte_2$$

Usamos el dato de que en t=0, la posición es r=6, y que 489,6-81,6·6=0

$$0=\frac{489{,}6}{81{,}6}[\frac{-\sqrt{6}}{489{,}6}\sqrt{489{,}6-81{,}6\cdot 6}+\frac{1}{\sqrt{81{,}6}}\arctan(\sqrt{81{,}6}\sqrt{\frac{6}{489{,}6-81{,}6\cdot 6}})]+cte_2$$

$$0=\frac{489{,}6}{81{,}6}\cdot\frac{1}{\sqrt{81{,}6}}\cdot\frac{\pi}{2}+cte_2\Rightarrow cte_2=-1{,}04334\,s$$

La expresión final es

$$t=\frac{-489{,}6}{81{,}6}[\frac{-\sqrt{x}}{489{,}6}\sqrt{489{,}6-81{,}6x}+\frac{1}{\sqrt{81{,}6}}\arctan(\sqrt{81{,}6}\sqrt{\frac{x}{489{,}6-81{,}6x}})]+1{,}04334$$

El tiempo que tarda en caer un metro es el tiempo asociado a que x=5 m

$$t=\frac{-489{,}6}{81{,}6}[\frac{-\sqrt{5}}{489{,}6}\sqrt{489{,}6-81{,}6\cdot 5}+\frac{1}{\sqrt{81{,}6}}\arctan(\sqrt{81{,}6}\sqrt{\frac{5}{489{,}6-81{,}6\cdot 5}})]+1{,}04334$$

$$t=0{,}5268\,s$$

Se valida que está entre los dos valores de tiempo indicados antes cualitativamente.
Cualitativamente para un rango de x pequeñas la expresión debe aproximarse a la de un MRUA en el que v_0=0 $t-t_0=\sqrt{2\frac{(x-x_0)}{a}}$