Problema física: Campo eléctrico. Ley de Gauss en esferas
enrique@fiquipedia.es Revisado 8 febrero 2020

Planteamiento
Se encuadra dentro del bloque de campo eléctrico de Física de 2º de Bachillerato. El objetivo es plantear problemas asociados a ley de Gauss en esferas / con simetría esférica, que pasa a ser el único caso incluido como obligatorio con LOMCE (antes en LOE sí estaban plano e hilo), pero para el que hay pocos ejercicios de EvAU asociados en Madrid.
El objetivo es tratar distintas situaciones con ley de Gauss y/o esferas, con campos y potenciales. Para ver que además de ejemplos son tipos de problemas que pueden aparecer en PAU / EvAU, se se intentan citar problemas similares o relacionados cuando existen. En algunos se introducen cálculos de flujo o cálculos de potenciales, que pueden no estar exclusivamente limitados a esferas.
En estos ejercicios se incluyen seguidos enunciado y resolución; algunos son de EvAU Madrid y se pueden ver enunciado y resolución por separado en problemas EvAU Madrid.

Comentario inicial: currículo, enunciados y resoluciones indican "teorema" pero sería más correcto indicar ley de Gauss
http://www.fiquipedia.es/home/recursos/teoremas-leyes

1. Carga puntual. Obtención de ley de Coulomb a partir de ley de Gauss.

Madrid 2019-Modelo B. Pregunta 3.-
a) Defina el flujo de una magnitud vectorial. Enuncie el teorema de Gauss.
b) Considérese una carga puntual, q, en el origen de coordenadas. Determine la expresión del flujo del campo eléctrico que crea dicha carga a través de una superficie esférica de radio R centrada en el origen. Utilice el teorema de Gauss para determinar el valor de ese campo eléctrico.
Madrid 2008 Junio Cuestión 4.-
a) Enuncie el teorema de Gauss y escriba su expresión matemática.
b) Utilice dicho teorema para deducir la expresión matemática del campo eléctrico en un punto del espacio debido a una carga puntual.

a) (Pregunta teórica similar a 2008-Junio-C4, que añade preguntar explícitamente por el flujo)
El flujo se suele asociar a un campo vectorial que asigna un vector a cada punto del espacio, pero enunciado pide definir flujo de una magnitud vectorial, no explícitamente de campo. El concepto de flujo es válido para un campo vectorial cualquiera, gravitatorio ó magnético, aunque se concreta más para el campo eléctrico ya que luego se pregunta por el teorema de Gauss.
Flujo Φ de una magnitud vectorial a través de una superficie es una magnitud escalar que cualitativamente mide la cantidad de vectores que la atraviesan. Matemáticamente $\Phi=\int \vec{E}\cdot\vec{dS}$
Si el campo tiene un módulo uniforme en toda la superficie, y forma un ángulo fijo con el vector superficie, se tiene $\Phi=E\int dS\cos\theta=E\cdot S\cdot\cos\theta$. En el caso habitual de que el vector campo y el vector superficie sean paralelos (campo perpendicular a la superficie) $\Phi=E\cdot S$
Unidades flujo campo eléctrico en SI: N/C·m^2 ó V/m·m^2 =V·m
Vector superficie S: módulo igual a área, dirección normal, y sentido hacia parte convexa superficie.

La ley de Gauss indica que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma de las cargas contenidas en esa superficie dividida por la permitividad eléctrica del medio. Esto es cierto sea cual sea la forma de dicha superficie cerrada.

Matemáticamente en forma integral $\Phi_c = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$

b) Tomamos como superficie una esfera centrada en la carga q. Utilizando la simetría esférica que nos indica que el campo siempre será radial y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera, y la fórmula de superficie de la esfera, podemos plantear la ley de Gauss en este caso

$$|\vec{E}| \oint_S d\vec{S} = |\vec{E}| \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = K\frac{q}{R^2}$$ Que coincide con la ley de Coulomb

2. Esfera cargada en su superficie (conductora o aislante)

Madrid 2019-Julio-Coincidentes B. Pregunta 3.-

En una superficie esférica de radio R = 1 m se encuentra uniformemente distribuida una carga Q = +3 C. Determine:

a) El potencial y el campo electrostático en un punto que diste del centro de la esfera r = 2R.

b) El potencial y el campo electrostático en el centro de la esfera.

Dato: Constante de la Ley de Coulomb, $K = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

a) Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie una esfera concéntrica con el centro de la esfera, con radio r=2R = 2 m. Por la simetría del problema el campo será siempre perpendicular a la superficie elegida, tendrá el mismo módulo en toda la superficie, y al ser positiva la carga contenida el campo estará dirigido hacia el exterior de la esfera, por lo que el flujo será positivo.

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{interior}}{\varepsilon_0}$$ Se nos da como dato $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$|\vec{E}| \oint_S d\vec{S} = |\vec{E}| \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = K\frac{q}{r^2}$$

Numéricamente el módulo es $|\vec{E}| = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3}{2^2} = 6{,}75 \cdot 10^9\, N/C$ (dirección y sentido ya indicados)

La expresión para el campo es la misma que para una carga puntual, e integrando se puede llegar a la misma expresión para potencial que para una carga puntual, que sustituyendo numéricamente

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3}{2} = 1{,}35 \cdot 10^{10}\, V$$

b) Aplicamos superposición para campo y potencial.

El campo en el centro de la esfera es nulo por simetría, ya que para cada punto de la esfera que aporte un diferencial de carga que crea cierto diferencial de campo en el centro de la esfera, hay un punto simétrico que crea un campo de igual módulo y dirección, pero sentido opuesto, que lo cancela.

El potencial en el centro de la esfera es el asociado a la integral de los potenciales que generan los diferenciales de carga de todos los puntos de la esfera, estando todos ellos a la misma distancia R del centro de la esfera.

Planteamos la integración

$$dQ = \sigma \cdot dS \Rightarrow Q = \sigma S \Rightarrow para\, la\, esfera\, Q = \sigma 4\pi R^2$$

$$dV = K\frac{dQ}{R} = K\frac{\sigma \cdot dS}{R}$$

$$V = \int_{esfera} dV = K\frac{\sigma}{R}\int_{esfera} dS = K\frac{\sigma}{R} 4\pi R^2 = K\frac{Q}{R}$$

La expresión del potencial en el centro de una esfera cargada uniformemente es la misma que la del potencial de una carga total Q a una distancia R; cualitativamente tenemos una carga total Q distribuida por toda la superficie de la esfera y toda ella está a una distancia R del centro.
Numéricamente es el doble del valor de apartado a, $V=2{,}7\cdot 10^{10}$ V

Madrid 2011-Junio B. Problema 2.-
Considérese un conductor esférico de radio R = 10 cm, cargado con una carga q = 5 nC.
a) Calcule el campo electrostático creado en los puntos situados a una distancia del centro de la esfera de 5 y 15 cm.
b) ¿A qué potencial se encuentran los puntos situados a 10 cm del centro de la esfera?
c) ¿Y los situados a 15 cm del centro de la esfera?
d) ¿Qué trabajo es necesario realizar para traer una carga de 2 nC desde el infinito a una distancia de 10 cm del centro de la esfera?
Datos: Constante de Coulomb $K=1/(4\pi\varepsilon_o) = 9\times10^9$ N m² C⁻².
a) No se dice explícitamente pero consideramos que el conductor está en equilibrio, por lo que la carga eléctrica se distribuye en su superficie. Para calcular el campo eléctrico utilizamos el teorema de Gauss, tomando como superficie una esfera centrada en el centro del conductor esférico y de radio igual a la distancia a los puntos de los que queremos conocer el valor del campo.
Utilizando la simetría esférica y la fórmula de superficie de la esfera gaussiana podemos plantear el teorema de Gauss en este caso

$$\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow|\vec{E}|\oint_S d\vec{S}=|\vec{E}|\cdot 4\pi r^2=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

Para puntos interiores a la esfera, al estar la carga distribuida en su superficie de la esfera, la carga interior a la superficie gaussiana es nula y también lo será el campo.
Para puntos exteriores a la esfera, la carga interior a la superficie gaussiana será q y tendremos que $|\vec{E}|=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=K\frac{q}{r^2}$, que es equivalente a si toda la carga q fuese puntual situada en el origen de coordenadas en el que está centrado la esfera.
Por lo tanto $\vec{E}(r=5\,cm)=0\,N/C$

$$\vec{E}(r=15\,cm)=K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-9}}{0{,}15^2}\vec{u}_r=2000\,\vec{u}_r\,N/C$$

El campo es un vector, por lo que indicamos, además de módulo, dirección y sentido: será radial y hacia el exterior.
b) El punto indicado es la superficie de la esfera $V=\frac{Kq}{r}=\frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-9}}{0{,}1}=450\,V$
Nota: En ese punto hay una discontinuidad para el campo, que es cero en el interior y tiene valor en el exterior, pero campo nulo no quiere decir potencial nulo. De hecho como el campo es nulo en el interior de la esfera, en toda ella el potencial es constante e igual al potencial en la superficie.
c) El punto indicado es en el exterior de la esfera $V=\frac{Kq}{r}=\frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-9}}{0{,}15}=300\,V$
d) Llamamos A al punto que se encuentra a 10 cm de la esfera

$$W_{\infty\to A}=-\Delta E_p=-q\Delta V=-q(V_A-V_\infty)=-qV_A=-2\cdot10^{-9}\cdot450=-9\cdot10^{-7}\,J$$

El trabajo es negativo, luego debe ser realizado externamente al campo, no lo realiza el campo.
Cualitativamente podemos ver que la esfera está cargada positivamente y queremos acercar una carga positiva.

Madrid 2009-Septiembre Cuestión 4.-
Una superficie esférica de radio R tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente en ella.

a) Deduzca la expresión del módulo del vector campo eléctrico en un punto situado en el exterior a dicha superficie haciendo uso del teorema de Gauss.
b) ¿Cuál es la razón entre los módulos de los vectores campo eléctrico en dos puntos situados a las distancias del centro de la esfera $r_1 = 2$ R y $r_2 = 3$ R?

a) Según el teorema de Gauss $\Phi_c = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$.

Tomamos como superficie una esfera centrada en el centro de la superficie esférica y de radio r > R. Utilizando la simetría esférica que nos indica que el campo siempre será radial y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera, y la fórmula de superficie de la esfera, podemos plantear el teorema de Gauss en este caso

$$|\vec{E}| \oint_S d\vec{S} = |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = K\frac{Q}{r^2}$$

La expresión es la misma que se obtendría para una carga puntual utilizando la ley de Coulomb.

b) $$\frac{|E(\vec{r}_1)|}{|E(\vec{r}_2)|} = \frac{K\frac{Q}{r_1^2}}{K\frac{Q}{r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(3\frac{R}{2}R\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

3. Esfera cargada en todo su volumen

Pendiente localizar un ejemplo de enunciado de ejercicio de este tipo en EvAU. Uno similar (con más cosas) sería ejercicio UNED 2013 en apartado de esferas concéntricas, en el que la esfera interior tiene carga en todo su volumen.

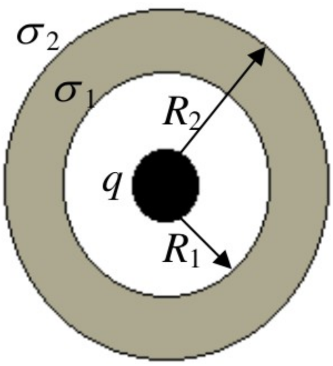
Pendiente: Oposiciones Melilla 2018, problema 1 a)

https://drive.google.com/file/d/11rBVm-VOGvuuvVKEW8AQNsCdEzMiSxIh/view

4. Esferas concéntricas (se ven algunas variantes con dos, se podrían añadir más esferas)

4.1 Esfera hueca con carga en las superficies interior y exterior (con y sin misma carga)

UNED 2015
https://drive.google.com/open?id=0B-t5SY0w2S8iYmlsYkNPLWl5eDg
página 4 pdf
Variante: apartado b es adicional para enlazar con flujo y se añaden datos numéricos.



En la figura se muestra una carga puntual de valor q (punto negro) situada en el centro de una esfera hueca (en gris) de radio interior R_1 y radio exterior R_2. La superficie interior de la esfera hueca (de radio R_1) está cargada con una densidad superficial de carga σ_1, mientras que la superficie exterior (de radio R_2) está cargada con una densidad superficial de carga σ_2.
a) Utilizar el teorema de Gauss para calcular el valor del

campo eléctrico en función de r (distancia radial al centro de las esferas) en las regiones:
$r < R_1$
$R_1 < r < R_2$
$r > R_2$
b) Calcular el flujo de campo eléctrico que atraviesa una esfera de radio $R_3 > R_2$
Datos: q=1 nC, R_1=10 cm, R_2 = 15 cm, σ_1, = -1 nC/m²; σ_2, = +4 nC/m²
Constante de la ley de Coulomb K = 9×10⁹ N m² C⁻²

a) Enunciamos el teorema de Gauss $\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}$

Por la simetría del problema tomamos superficies esféricas concéntricas a las esferas centradas en la carga puntual, de modo que el campo siempre tiene dirección paralela al vector diferencial de superficie, sentido saliente si la carga es positiva, y de módulo constante en la superficie, por lo que podemos plantear

$$|E|4\pi r^2=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}\Rightarrow|E|=K\frac{Q_{interior}}{r^2}$$

(Campo es vector: indicamos módulo como expresión, dirección y sentido cualitativamente como texto, también podemos indicar $\vec{E}=K\frac{Q_{interior}}{r^2}\vec{u}_r$)

(σ es densidad de carga superficial y las superficies son esferas)

- $r < R_1$: $Q_{interior} = 10^{-9}$ C, $\vec{E}=9\cdot 10^9\frac{10^{-9}}{r^2}\vec{u}_r=\frac{9}{r^2}\vec{u}_r N/C$
- $R_1 < r < R_2$: $Q_{interior}=q+4\pi R_1^2\sigma_1=10^{-9}+4\pi(0{,}1)^2\cdot(-10^{-9})=8{,}74\cdot 10^{-10}C$
  $\vec{E}=9\cdot 10^9\frac{8{,}74\cdot 10^{-10}}{r^2}\vec{u}_r=\frac{7{,}87}{r^2}\vec{u}_r N/C$
- $r < R_2$:
  $Q_{interior}=q+4\pi R_1^2\sigma_1+4\pi R_2^2\sigma_2=10^{-9}+4\pi(0{,}1)^2\cdot(-10^{-9})+4\pi(0{,}15)^2 4\cdot 10^{-9}=2\cdot 10^{-9}C$
  $\vec{E}=9\cdot 10^9\cdot\frac{2\cdot 10^{-9}}{r^2}\vec{u}_r=\frac{18}{r^2}\vec{u}_r N/C$

b) El flujo solamente depende de la carga interior, que es la carga asociada a la tercera situación del apartado a, por lo que

$$\Phi_c=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}=4\pi K Q_{interior}=4\pi 9\, 10^9\cdot(10^{-9}+4\pi(0{,}1)^2\cdot(-10^{-9})+4\pi(0{,}15)^2 4\cdot 10^{-9})=226\, V\cdot m$$

Como es una esfera y sabemos que el campo es uniforme en toda ella, y tenemos calculado su valor en función de r, tomamos un valor de r exterior, por ejemplo r=1 m

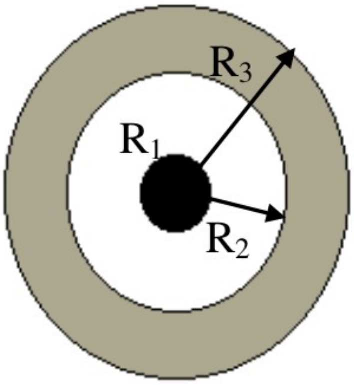
$$\Phi_c=E\cdot S=18\cdot 4\pi 1^2=226[V\cdot m] ó [N\frac{m^2}{C}]$$

Se puede ver algún problema asociado a oposiciones, por ejemplo Andalucía 2018-Física 1
http://www.fiquipedia.es/home/recursos/recursos-para-oposiciones/2018-06-23-Andaluc%C3%ADa-F%C3%ADsica1.pdf?attredirects=0

4.2 Esfera hueca con densidad de carga entre superficies interior y exterior

UNED 2013 https://drive.google.com/file/d/0B-t5SY0w2S8iTEttU01yQXdpWEU/view páginas 85, 96, 100 pdf

Una esfera hueca de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (ver figura) contiene una carga uniformemente distribuida por todo su volumen con una densidad ρ. En su centro hay una esfera sólida de radio R_1 cargada uniformemente con una carga total q.



Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por esta distribución de carga para:
a) $0 < r < R_1$
b) $R_2 < r < R_3$
c) $r > R_3$

a) Enunciamos el teorema de Gauss $\Phi_c = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}$

Por la simetría del problema tomamos superficies esféricas concéntricas a las esferas centradas en la carga puntual, de modo que el campo siempre tiene dirección paralela al vector diferencial de superficie, sentido saliente si la carga es positiva, y de módulo constante en la superficie, por lo que podemos plantear

$$|E| 4\pi r^2 = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0} \Rightarrow |E| = K\frac{Q_{interior}}{r^2}$$

(Campo es vector: indicamos módulo como expresión, dirección y sentido cualitativamente como texto, también podemos indicar $\vec{E} = K\frac{Q_{interior}}{r^2}\vec{u}_r$)

(ρ es densidad de carga por unidad de volumen)

- $r < R_1$: Asumimos que la carga total q está distribuida uniformemente en todo el volumen

  $$\rho = \frac{q}{V(R_1)} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \qquad Q(r) = V(r)\cdot\rho = \frac{4}{3}\cancel{\pi} r^3 \cdot \frac{q}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_1^3}$$

  $$\vec{E} = K\frac{Q(r)}{r^2}\vec{u}_r = K\frac{q}{R_1^3} r\,\vec{u}_r\, N/C$$

  Entre R_1 y R_2 el campo tiene módulo constante ya que que la carga contenida no varía según se aumenta radio, y su valor es $\vec{E} = K\frac{q}{R_1^2}\vec{u}_r\, N/C$

- $R_2 < r < R_3$: Como la carga está distribuida uniformemente en el volumen

  $$Q(r) = q + V(r)\cdot\rho = q + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3)\cdot\rho \qquad \vec{E} = K\frac{Q(r)}{r^2}\vec{u}_r = K\frac{q + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3)\cdot\rho}{r^2}\vec{u}_r\, N/C$$

- $R > R_3$: el campo tiene módulo constante ya que que la carga contenida no varía según se aumenta radio, y su valor es

  $$\vec{E} = K\frac{q + \frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)\cdot\rho}{R_3^2}\vec{u}_r\, N/C$$

Pendiente: oposiciones Castilla-La Mancha 2018, problema 1
https://drive.google.com/file/d/1_rKXmuvYNVSikvKLf4B9AZPHXv38g8gg/view

4.3 Esferas con densidad de carga

UNED 2013 https://drive.google.com/file/d/0B-t5SY0w2S8iTEttU01yQXdpWEU/view
Página 8 pdf

2. Un modelo muy simple de neutrón consiste en considerar a dicha partícula como una esfera de radio R_1 ($R_1<R_2$) cargado positivamente con carga +e compuesta de dos partes. Por un lado tenemos un núcleo de radio R_1, rodeado por una corteza esférica de radio interno R_1 y radio externo R_2 con carga -e. En ambas partes la carga está distribuida uniformemente en el volumen que ocupa. Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por este "neutrón" para:

a) $0 < r \leq R_1$
b) $R_1 < r \leq R_2$
c) $r > R_2$

a) Enunciamos el teorema de Gauss $\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}$

Por la simetría del problema tomamos superficies esféricas concéntricas a las esferas centradas en la carga puntual, de modo que el campo siempre tiene dirección paralela al vector diferencial de superficie, sentido saliente si la carga es positiva, y de módulo constante en la superficie, por lo que podemos plantear

$$|E|4\pi r^2=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}\Rightarrow|E|=K\frac{Q_{interior}}{r^2}$$

(Campo es vector: indicamos módulo como expresión, dirección y sentido cualitativamente como texto, también podemos indicar $\vec{E}=K\frac{Q_{interior}}{r^2}\vec{u}_r$)

(ρ es densidad de carga por unidad de volumen)

- $r < R_1$: Asumimos que la carga total q está distribuida uniformemente en todo el volumen

  $$\rho=\frac{q}{V(R_1)}=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \qquad Q(r)=V(r)\cdot\rho=\cancel{\frac{4}{3}\pi}r^3\cdot\frac{q}{\cancel{\frac{4}{3}\pi}R_1^3}$$

  $$\vec{E}=K\frac{Q(r)}{r^2}\vec{u}_r=K\frac{q}{R_1^3}r\,\vec{u}_r\,N/C$$

  Entre R_1 y R_2 el campo tiene módulo constante ya que que la carga contenida no varía según se aumenta radio, y su valor es $\vec{E}=K\frac{q}{R_1^2}\vec{u}_r\,N/C$

- $R_2 < r < R_3$: Como la carga está distribuida uniformemente en el volumen

  $$Q(r)=q+V(r)\cdot\rho=q+\frac{4}{3}\pi(r^3-R_2^3)\cdot\rho \qquad \vec{E}=K\frac{Q(r)}{r^2}\vec{u}_r=K\frac{q+\frac{4}{3}\pi(r^3-R_2^3)\cdot\rho}{r^2}\vec{u}_r\,N/C$$

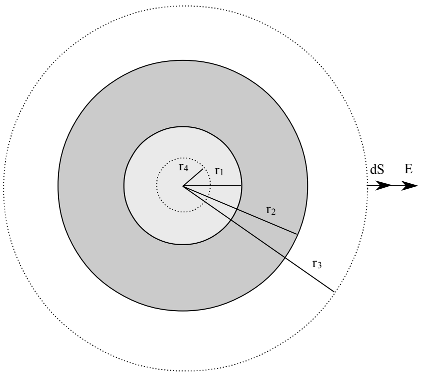
- $R > R_3$: el campo tiene módulo constante ya que que la carga contenida no varía según se aumenta radio, y su valor es $\vec{E}=K\frac{q+\frac{4}{3}\pi(R_3^3-R_2^3)\cdot\rho}{R_3^2}\vec{u}_r\,N/C$

2008 Septiembre B. Problema 1.- Una carga de +10 nC se distribuye homogéneamente en la región que delimitan dos esferas concéntricas de radios r_1=2 cm y r_2=4 cm. Utilizando el teorema de Gauss, calcule:
a) El módulo del campo eléctrico en un punto situado a 6 cm del centro de las esferas.
b) El módulo del campo eléctrico en un punto situado a 1 cm del centro de las esferas.
Dato: *Permitividad eléctrica del vacío $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ C^2\ N^{-1}m^{-2}$*

a) Según el teorema de Gauss $\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$.

Tomamos como superficie una esfera concéntrica con la esfera hueca cargada y de radio r_3=0,06 m que englobará a toda la esfera cargada, por lo que la carga contenida serán + 10 nC.

Utilizando la simetría esférica que nos indica que el campo siempre será radial y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera, y la fórmula de superficie de la esfera, podemos plantear el teorema de Gauss en este caso



$$|\vec{E}|\oint_S d\vec{S}=|\vec{E}|\cdot 4\pi r_3^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}|=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}=\frac{10\cdot10^{-9}}{4\pi 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot(0{,}06)^2}=2{,}5\cdot10^4\ N/C$$

b) Tomamos como superficie una esfera concéntrica con la esfera hueca cargada y de radio r_4=0,01 m que quedará dentro del hueco de la esfera, por lo que la carga contenida será nula. Por lo tanto, la intensidad de campo eléctrico en su interior será nula, $|\vec{E}(r=0{,}01\ m)|=0\ N/C$.

5. Cálculos de flujo utilizando la ley de Gauss

2018-Modelo Madrid

A. Pregunta 3.- Considérese una carga puntual q = 5 nC situada en el centro de una esfera de radio R = 10 cm. Determine:
a) El flujo del campo eléctrico a través de la superficie de la esfera.
b) El trabajo que es necesario realizar para traer una carga de 2 nC desde el infinito hasta una distancia de 10 cm del centro de la esfera.
Dato: Constante de Coulomb $K=1/(4\pi\varepsilon_o) = 9\cdot10^9\ N\ m^2\ C^{-2}$.

a) Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie una esfera concéntrica con el centro de la esfera, con radio r=R. Por la simetría del problema el campo será siempre perpendicular a la superficie elegida, tendrá el mismo módulo en toda la superficie, y al ser positiva la carga contenida el campo estará dirigido hacia el exterior de la esfera, por lo que el flujo será positivo.

$\Phi=\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{\Sigma Q_{interior}}{\varepsilon_0}$ Se nos da como dato $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

La única carga contenida en la esfera es la que está en su centro de 5 nC

$\Phi=4\pi K Q=4\pi\cdot9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-9}=180\pi\ V\cdot m\approx565{,}5\ V\cdot m$ (Ojo: Wb es para magnético)

El radio de la esfera no influye en el flujo.

b) Usamos la expresión del potencial para una carga puntual, que toma como referencia V=0 en infinito, para calcular el potencial a 10 cm de la esfera.

$$V=K\frac{Q}{r}=\frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-9}}{0{,}1}=450\ V$$

Asumimos que en ambos puntos inicial y final la energía cinética es nula: el trabajo a realizar externamente lo calculamos como el trabajo realizado por el campo cambiado de signo. El trabajo realizado por el campo es por definición la variación de energía potencial cambiada de signo.

$$W_{r=\infty \rightarrow r=10\,cm}=-\Delta E_p=-q(V_{r=10\,cm}-V_{r=\infty})=-2\cdot 10^{-9}\cdot(450-0)=-9\cdot 10^{-7}\,J$$

El signo negativo, según convenio, indica que se realiza en contra del campo: el trabajo se realiza externamente al campo. Una carga positiva se mueve hacia potenciales menores, y se movería alejándose de la carga positiva. El trabajo realizado externamente el campo sería positivo $9\cdot 10^{-7}$ J

2011-Septiembre-Coincidentes Madrid

A. Cuestión 2.- En una región del espacio, el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es cero.
a) ¿Se puede afirmar que el campo eléctrico es cero en todos los puntos de la superficie? Razone la respuesta.
b) Si se disponen dos cargas puntuales, una de +2μC colocada en el punto (-1, 0) cm y la otra de -8 μC en el punto (1, 0) cm, determine el flujo de campo eléctrico que atraviesa una esfera de radio 2 cm centrada en el origen de coordenadas.
Dato: Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times10^9$ N m^2 C^{-2}.

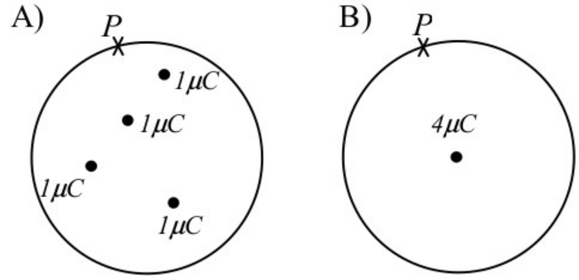
a) No se puede afirmar, ya se pueden poner al menos un ejemplo de situación en la que pueden hacer que el flujo sea nulo sin ser el campo eléctrico nulo.
La definición de flujo a través de una superficie cerrada es $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}$, y precisamente por la ley de Gauss está relacionado con las cargas existentes en el interior. Si el flujo en la superficie cerrada es nulo, la carga neta existente en el interior es nula, y puede ocurrir de dos maneras:
Ejemplo 1: La carga neta es nula porque no hay cargas en el interior, pero el campo eléctrico es uniforme: entre las placas de un condensador. Si la superficie cerrada es un cubo y el campo eléctrico uniforme es paralelo a cuatro de sus caras, la integral se puede descomponer en la suma de 6 integrales, una por cada cara del cubo, y cuatro de esas integrales serían nulas ya que el campo sería paralelo a la superficie. Para las otras dos caras, las integrales tendrían el mismo valor numérico pero distinto signo, por lo que el flujo total sería nulo. Enlaza con la definición cualitativa de que el flujo a través de una superficie es una medida del número neto de líneas de campo que la atraviesan, y como en este caso entran tantas como salen, s$_0$u flujo es nulo
Ejemplo 2: La carga neta es nula porque hay cargas en su interior, pero el valor de las cargas positivas es igual al valor de las negativas. El caso más sencillo serían dos cargas, una positiva y otra negativa, ambas del mismo módulo (sería similar al apartado b, si el valor numérico coincidiese). En ese caso, se puede visualizar, a través de las líneas de campo, que el campo resultante no es nulo en toda la superficie de la esfera.
b) Utilizando la ley de Gauss, la esfera encierra a su interior las dos cargas (realmente están en el borde de la esfera, pero las suponemos puntuales y que las contiene la esfera)

$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\Phi=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$ Como se nos da como dato $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ (unidades K y $1/\varepsilon_0$ coinciden)

$\Phi=4\pi\cdot 9\cdot 10^9(2\cdot 10^{-6}-8\cdot 10^{-6})=-6{,}79\cdot 10^5[N\,m^2C^{-1}][V\,m]$ (Ojo: Wb es para magnético)

2007 Junio Castilla y León Cuestión B4

Considere las dos situaciones de la figura. ¿El flujo que atraviesa la esfera es el mismo en ambas situaciones?. ¿El campo eléctrico en el mismo punto P es igual en ambas situaciones?. Razone en todo caso su respuesta.



Sí, el flujo que atraviesa la esfera es el mismo en ambas situaciones por la ley de Gauss, ya que en ambos casos la carga contenida en la esfera es la misma.
No, el campo eléctrico en el punto P no es el mismo en ambas situaciones. En el caso B usando la ley de Coulomb al estar generado por una única carga en el centro de la esfera será radial, pero en el caso A aplicando superposición será la suma de los campos generados por cada una de las cuatro cargas, y, aparte de su módulo, no será necesariamente radial.

2005 Junio Castilla y León Cuestión A4
Aplicando dicho teorema [de Gauss] obtenga razonadamente el flujo del campo eléctrico sobre la superficie de un cubo de lado a en los siguientes casos:
a) Una carga q se coloca en el centro del cubo.
b) La misma carga q se coloca en un punto diferente del centro pero dentro del cubo.
c) La misma carga q se coloca en un punto fuera del cubo.

Primero enunciamos la ley de Gauss $\Phi=\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{\Sigma Q_{interior}}{\varepsilon_0}$

a y b) La carga en el interior del cubo es q, luego $\Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}$

c) La carga en el interior del cubo es 0, luego $\Phi=0$

2009 Reserva 1 Castilla-La Mancha. Cuestión 3.b
El flujo eléctrico a través de una superficie esférica es 314 Nm^2C^{-1}, determina la carga que encierra. (ε_0 = 8,85· 10^{-12} $C^2m^{-2}N^{-1}$)

Enunciamos la ley de Gauss $\Phi=\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{\Sigma Q_{interior}}{\varepsilon_0}$

Operamos y despejamos $314=\frac{Q_{interior}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\Rightarrow Q_{interior}=314\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}=2{,}79\cdot 10^{-9}C$

2008 Junio Castilla-La Mancha. Cuestión 3.b
Una carga eléctrica puntual de 2 μC se encuentra situada en el centro geométrico de un cubo de 2 m de arista.
El medio es el vacío. Calcula el flujo eléctrico a través de la superficie cúbica.
(ε_0 = 8,85· 10^{-12} $C^2m^{-2}N^{-1}$, 1μC=10^{-6} C)

Enunciamos la ley de Gauss $\Phi=\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{\Sigma Q_{interior}}{\varepsilon_0}$

No es relevante el tamaño del cubo ni la forma de la superficie cerrada, sino la carga que contiene

Operando $\Phi=\frac{2\cdot 10^{-6}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}=2{,}26\cdot 10^5\,V\cdot m$

2005 Reserva 2 Castilla-La Mancha. Cuestión 3.b
b) Una superficie esférica de radio R=2 m encierra una carga puntual q=1μC en su centro. Determina el flujo a través de dicha superficie. ¿Variará el flujo si la carga no está en el centro?
(ε_0 = 8,85· 10^{-12} $C^2m^{-2}N^{-1}$, 1μC=10^{-6} C)

Enunciamos la ley de Gauss $\Phi=\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{\Sigma Q_{interior}}{\varepsilon_0}$

No es relevante el tamaño de la esfera ni la forma de la superficie cerrada, sino la carga que contiene, por ello no variará el flujo si la carga no está en el centro, siempre que esté contenida en la esfera.

Operando $\Phi=\frac{10^{-6}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}=1{,}13\cdot 10^5\,V\cdot m$