enrique@fiquipedia.es Revisado 16 marzo 2016

Planteamiento

Se encuadra dentro del bloque de campo eléctrico de Física de 2º de Bachillerato. El objetivo es plantear un problema en el que aparezca el hilo, que está en los contenidos obligatorios de Física de 2º de Bachillerato LOE *"Teorema de Gauss. Aplicación a campos eléctricos creados por un elemento continuo: Esfera, hilo y placa."* aunque tanto placa como hilo dejan de estar citados en LOMCE que solamente cita explícitamente esfera "*6.1. Determina el campo eléctrico creado por una esfera cargada aplicando el teorema de Gauss."*
El objetivo también es relacionarlo con un caso concreto de líneas de campo y poner unidades al flujo eléctrico, que no se calcula ni se le ponen unidades tan habitualmente como el flujo magnético.
Al ser un problema de campo eléctrico, se aprovecha para calcular potenciales y trabajo razonando su signo, realizando una integral simple que se puede realizar en bachillerato y permite obtener expresión de potencial y reforzar la idea de que lo que se manejan son diferencias de potenciales, y que los supuestos valores absolutos son respecto a una referencia donde se fija arbitrariamente el cero. En la mayoría de los problemas no se suele diferenciar el trabajo realizado por el campo y trabajo realizado externamente, asumiendo siempre trabajo realizado por el campo, y aquí se intenta incorporar esa diferenciación.

Enunciado

Se tienen dos conductores rectilíneos y paralelos de 1 m de longitud separados 10 cm entre sí, ambos cargados, el primero con +2 μC y el segundo con -5 μC
a) Utilizar el teorema de Gauss para calcular la expresión del campo eléctrico creado por cada conductor y el valor del campo eléctrico en el punto medio entre ambos conductores.
b) Representa de manera aproximada las líneas de campo entre ambos conductores, calculando y situando el punto entre ambos conductores en el que el campo es nulo.
c) Calcula cuando valdría el flujo sobre una superficie cerrada que encerrase ambos conductores. Justifica el signo del flujo.
d) Calcula el trabajo que habría que realizar externamente para trasladar una carga de -3 nC de un punto A situado a 1 cm del conductor cargado negativamente y el punto B a 2 cm del conductor cargado positivamente, ambos puntos en el plano formado por ambos hilos y entre ambos conductores. Justifica el signo del trabajo obtenido.
Nota: para la demostración con Gauss considerar hilos indefinidos, pero no para cálculos. Considerar los hilos en posiciones fijas, no se atraen.
Datos: Constante de la ley de Coulomb $K = 9{\times}10^9\ N\ m^2\ C^{-2}$

Solución

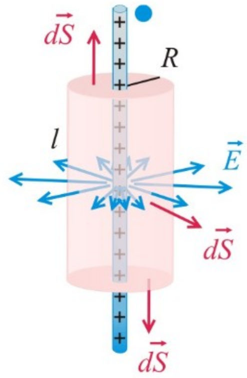
a) La demostración con Gauss del campo creado por el hilo es algo general: los pasos generales para hacer se pueden esquematizar en:
1º enunciar el teorema Gauss
2º según geometría comentar superficie elegida y dirección y sentido de vector E
3º realizar la integral de superficie cualitativamente
4º deducir la expresión del módulo de E
Se incluyen referencias: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/elecyl.html donde se comenta también en el interior del conductor rectilíneo.
http://fisicayquimicaenflash.es/campoelec/camelec07.htm se calculan esfera, placa e hilo
http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/electro/electro_probl_files/problelectr3.pdf (se incluye la imagen de este enlace)
Llamamos $\lambda = Q/l$ la densidad lineal de carga en el hilo. Para calcular Φ a una distancia r del hilo calculamos el flujo a través de la superficie cilíndrica cuyo eje es el hilo.

$$\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\Phi=\left(\int_{TapaSuperior}\vec{E}\,d\vec{S}+\int_{TapaInferior}\vec{E}\,d\vec{S}+\int_{CaraLateral}\vec{E}\,d\vec{S}\right)=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

Como en las tapas el campo y el vector superficie son perpendiculares, su producto vectorial es cero, y como en la cara lateral vector campo y vector superficie son paralelos, podemos escribir

$$\Phi_c=|\vec{E}|\int_{CaraLateral} dS=|\vec{E}|\,2\pi R L=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$



http://acer.forestales.upm.es

Para calcular la carga encerrada, como $\lambda=\frac{Q}{l}\Rightarrow Q=\lambda l$

Sustituyendo $|\vec{E}|\,2\pi R\cancel{l}=\lambda\frac{\cancel{l}}{\varepsilon_0}\Rightarrow|\vec{E}|=\frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0}$

Con esto obtenemos el módulo; la dirección es radial desde el hilo, en sentido saliente si está cargado positivamente y hacia el hilo si está cargado negativamente.

Si tenemos dos hilos paralelos, uno con carga positiva y otro con carga negativa, el campo total en el punto medio lo calculamos por superposición como la suma de campos generados por cada uno de ellos, ambos con misma dirección y sentido, dirigidos de hilo con carga positiva hacia hilo con carga negativa.

$\lambda=Q/l$: $\lambda_+=2\cdot10^{-6}/1=2\cdot10^{-6}$ C/m, $\lambda_-=-5\cdot10^{-6}/1=-5\cdot10^{-6}$ C/m

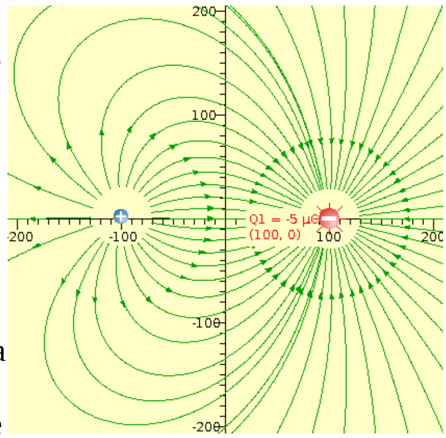
En el enunciado nos dan K; $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon_0}=4\pi K$

$$E_T=E_1+E_2=\frac{|\lambda_+|}{2\pi r\varepsilon_0}+\frac{|\lambda_-|}{2\pi r\varepsilon_0}=\frac{4\pi K}{2\pi r}(|\lambda_+|+|\lambda_-|)$$

$$E_T=\frac{4\cdot9\cdot10^9}{2\cdot0{,}05}(2\cdot10^{-6}+5\cdot10^{-6})=2{,}52\cdot10^6\,N/C\text{ ó }V/m$$

$$E_{total}=|E_+|+|E_-|=\frac{|\lambda_+|}{2\pi r\varepsilon_0}+\frac{|\lambda_-|}{2\pi r\varepsilon_0}=\frac{2\cdot10^{-6}\cdot4\cdot\pi\cdot9\cdot10^9}{2\pi0{,}05}+\frac{5\cdot10^{-6}\cdot4\cdot\pi\cdot9\cdot10^9}{2\pi0{,}05}$$

$$E_{total}=720000+1800000=2{,}52\cdot10^6\,N/C\text{ ó }V/m$$



b) La idea básica es que las líneas salen del hilo cargado positivamente y entran al hilo cargado negativamente. Si hacemos una visión en la que los hilos se ven como un punto, sería aproximadamente equivalente al diagrama para dos cargas puntuales, donde se verían las líneas un poco más juntas en la carga negativa, ya que el valor del módulo de carga es mayor, y genera un campo eléctrico más intenso que la otra carga. (usado http://www.xtec.cat/~ocasella/applets/elect/appletsol2.htm)

La pregunta "calculando y situando el punto entre ambos conductores en el que el campo es nulo" es trampa, ya que si se ha hecho el apartado a y las líneas de campo, se ve que el campo no se anula en ningún punto entre ambos conductores. Efectivamente sí hay un punto donde el módulo de ambos campos es el mismo, pero no se anulan ya que ambos campos tienen misma dirección y sentido.

c) Aplicando el teorema de Gauss, el flujo solamente depende de la cantidad de carga contenida en la superficie. Da igual la forma de la superficie: la elección de una forma concreta de superficie se hace para calcular el campo utilizando Gauss, pero no es lo que se pide.

La carga contenida en la superifice es la suma de carga de los dos hilos 2 μC - 5 μC = -3 μC

$$\Phi=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}=(2\cdot10^{-6}-5\cdot10^{-6})\cdot4\pi\cdot9\cdot10^9=-339292\,N\,m^2\,C^{-1}$$

Utilizando la defiinición de flujo (campo por superficie) y asociando la idea de gradiente (voltaje dividido por distancia es igual a campo), podemos plantear también que las unidades de flujo de campo eléctrico son $(V/m)\cdot m^2 = V\cdot m$
El flujo es negativo, es entrante, ya que hay más carga negativa que positiva, la carga neta total interna es negativa, y las líneas entran en la superficie.
d) El trabajo lo podemos asociar a la variación de energía potencial a ir de A hasta B. Si es el trabajo realizado por el campo es igual a la variación de energía potencial cambiada de signo, pero si es realizado externamente tenemos $W_{externo} = \Delta E_p = q\Delta V = q(V(B) - V(A))$
En principio podríamos pensar en calcular el potencial en cada uno de los puntos A y en B usando el principio de superposición sumando el potencial creado por cada uno de los hilos, pero eso implicaría usar expresiones habituales de potencial como la de potencial para una carga puntual o potencial a cierta distancia de un plano. Sin embargo esas expresiones son "absolutas" porque asumen el potencial 0 en un punto concreto. Pero en este caso se puede ver que no podemos asumir potencial 0 en el hilo ni en infinito, y debemos obtener la expresión de la diferencia de potencial, que realmente es lo único que podemos conocer. La debemos obtener integrando, tomamos $R_1<R_2$ y densidad de carga positiva, con lo que el vector campo y el vector desplazamiento tienen el mismo sentido. Si la densidad de carga es negativa el sentido del campo será opuesto, y como el sentido del desplazamiento seguiría siendo el mismo, el producto escalar introduciría un signo menos aparte del módulo del campo que tendría valor absoluto de densidad de carga.

$$\Delta V = V(R_2) - V(R_1) = \frac{\Delta E_p}{q} = \frac{-W_{R_1\to R_2}}{q} = \frac{-\int_{R_1}^{R_2} \vec{F}\, d\vec{r}}{q} = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\, d\vec{r}$$ Signo opuesto

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{|\lambda_+|}{2\pi\varepsilon r} dr = \frac{-|\lambda_+|}{2\pi\varepsilon}[\ln(r)]_{R_1}^{R_2} = \frac{-|\lambda_+|}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = -2|\lambda_+| K \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

La diferencia de potencial asociada al hilo de carga positiva:

$$\Delta V_{AB\,hilo+} = -2|\lambda_+| K \ln\left(\frac{R_{B+}}{R_{A+}}\right) = -2\cdot 2\cdot 10^{-6} 9\, 10^9 \ln\left(\frac{0{,}02}{0{,}09}\right) = 54147\, V$$

(Validamos $\Delta V_{AB}>0$: carga positiva sería repelida por el hilo +, iría hacia A, potencial A menor)
La diferencia de potencial asociada al hilo de carga negativa:

$$\Delta V_{AB\,hilo-} = +2|\lambda_-| K \ln\left(\frac{R_{B-}}{R_{A-}}\right) = +2\cdot|-5\cdot 10^{-6}| 9\, 10^9 \ln\left(\frac{0{,}08}{0{,}01}\right) = 187150\, V$$

(Validamos $\Delta V_{AB}>0$: carga positiva sería atraía por el hilo -, iría hacia A, potencial A menor)
La diferencia de potencial total es la superposición de ambas:

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{AB\,hilo+} + \Delta V_{AB\,hilo-} = 54147 + 187150 = 241297\, V$$

$$W_{externo} = q\cdot\Delta V = -3\cdot 10^{-9}\cdot 241297 = -7{,}24\cdot 10^{-4}\, J$$

El signo es negativo, es un trabajo que no hay que aportar externamente, se hace a favor del campo (el trabajo realizado por el campo sería positivo). Estamos moviendo una carga negativa hacia un potencial mayor (la diferencia de potencial es positiva), y las cargas negativas son llevadas por el campo hacia potenciales mayores. También se puede ver en el diagrama de líneas de campo que el campo va de B (cerca de conductor con carga positiva) hacia A (cerca del conductor con carga negativa), y como la carga es negativa, la fuerza que hace el campo tiene sentido opuesto, que es de A hacia B.